Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
M. Slassi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
7. November 2008

3. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Sei

$$x_{n+1} = \frac{500x_n}{x_n + 100}$$

für $n \geq 0$ und $x_0 = 5000$.

(a) Berechnen Sie x_1, x_2, x_3 und x_4.

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $x_n \geq 400$ für $n \geq 0$.

Lösung:

(a) $x_1 = \frac{25000}{51}$, $x_2 = \frac{125000}{301}$, $x_3 = \frac{625000}{1551}$, $x_4 = \frac{3125000}{7801}$.

(b) **IA:** Betrachte $n = 0$. Es gilt $x_0 = 5000 > 400$. Die Aussage ist also wahr für $n = 0$.
IS: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $x_n \geq 400$ (IV).
<u>Behauptung:</u>

$$x_{n+1} \geq 400.$$

<u>Beweis:</u>

$$x_{n+1} = \frac{500x_n}{x_n + 100} \overset{\text{(IV)}}{\geq} \frac{500x_n}{x_n + \frac{1}{4}x_n} \geq 400.$$

Aufgabe G2 ()

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ für $x \in D(h) = \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von h.

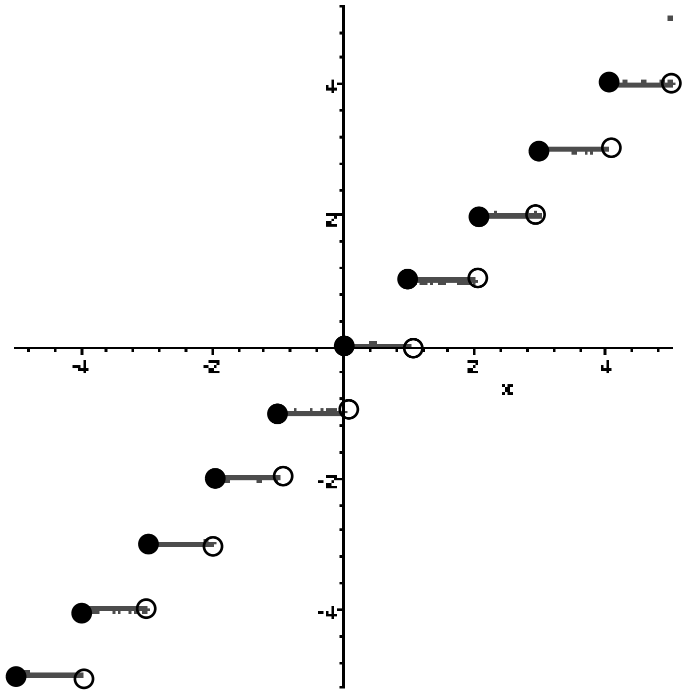
(b) Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Funktion h.

(c) Bestimmen Sie die Bildmenge von h (Beweis!).

(d) Ist h injektiv und/oder surjektiv? Begründen Sie sorgfältig!

(e) Wie kann man die Definitionsmenge und/oder den Wertebereich so verändern (falls notwendig), dass h injektiv bzw. surjektiv ist?

Lösung:



(a)

(b) Die Funktion h rundet reelle Zahlen auf die nächst kleinere ganze Zahl ab.

(c) Behauptung: Es gilt $B(h) = \mathbb{Z}$.
Beweis:
„$\subset$": Nach Definition von h gilt $B(h) \subset \mathbb{Z}$.
„$\supset$": Sei $z \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $f(z) = z$, d.h. $z \in B(h)$.

(d) Da $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}$, ist h nicht surjektiv. Wegen $h(1) = h(\frac{3}{2}) = 1$ ist h nicht injektiv.

(e) Für surjektive Funktionen ist die Bildmenge gleich dem Wertebereich. Daher wählen wir als Wertebereich die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.
Wir definieren $\tilde{h} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $\tilde{h}(z) = h(z)$ für $z \in D(\tilde{h}) = \mathbb{Z}$. Dann ist $\tilde{h}$ surjektiv und injektiv. (Wieso? Gibt es noch andere Möglichkeiten?)

Aufgabe G3 ()

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv.

(a) Bestimmen Sie $g_1 = f \circ f^{-1}$ und $g_2 = f^{-1} \circ f$. Geben Sie auch die jeweilige Definitionsmenge und die jeweilige Bildmenge an.

(b) Gilt $g_1 = g_2$?

Lösung:

(a) Es gilt $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_1(x) = x$ für $x \in D(g_1) = B(f)$. Die Bildmenge $B(g_1) = B(f)$.
Es gilt $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_2(x) = x$ für $x \in D(g_2) = D(f)$. Die Bildmenge $B(g_2) = D(f)$.

(b) I.A. stimmen die beiden Funktionen g_1 und g_2 nicht überein, da die Definitionsmengen nicht gleich sind.

Aufgabe G4 ()

(a) Bestimmen Sie
$$s = \sum_{k=1}^{100} k^6 + \sum_{m=2}^{101} [75 - (m-1)^6].$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Wert (in Abhängigkeit von n) von
$$t(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{k+2} + \sum_{m=n+3}^{2n+2} \frac{m-2}{m}.$$

Lösung:

(a) Es gilt:
$$s = \sum_{k=1}^{100} k^6 + \sum_{m=2}^{101} [75 - (m-1)^6] \overset{l=m-1}{=} \sum_{k=1}^{100} k^6 + \sum_{l=1}^{100} [75 - l^6] = \sum_{l=1}^{100} 75 = 7500.$$

(b)
$$\begin{aligned} t(n) &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{k+2} + \sum_{m=n+3}^{2n+2} \frac{m-2}{m} \overset{l=m-2}{=} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{k+2} + \sum_{l=n+1}^{2n} \frac{l}{l+2} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} 1 = n. \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (9 Punkte)

Sind folgende Funktionen surjektiv? Sind sie injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(z) = 3z$ für $z \in D(f) = \mathbb{Z}$

(b) $g : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ mit $g(x) = |x-1|$ für $x \in D(g) = \mathbb{R}$

(c) $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $h(x) = 3x$ für $x \in D(h) = \mathbb{Q}$

Lösung:

(a) Die Funktion f ist nicht surjektiv, da es keine $z \in \mathbb{Z}$ gibt mit $f(z) = 3z = 1$. Behauptung:f ist injektiv.
Beweis: Sei $z_1, z_2 \in D(f)$ mit $z_1 \neq z_2$. Dann gilt $f(z_1) = 3z_1 \neq 3z_2 = f(z_2)$, da $3z_1 \neq 3z_2$ aus $z_1 \neq z_2$ folgt.

(b) Die Funktion g ist nicht injektiv, da $g(0) = 1 = g(2)$ und $0, 2 \in D(g)$ gilt. Sie ist surjektiv, da für $y \in [0, \infty[$ (Wertebereich) $g(y+1) = y$ und $y + 1 \in D(g)$ gilt.

(c) Die Funktion h ist injektiv (ähnliche Argumentation wie in (a)). Sie ist aber im Gegensatz zu f surjektiv, da für $x \in \mathbb{Q}$ (Wertebereich) $h(x/3) = x$ und $x/3 \in \mathbb{Q} = D(h)$ gilt.

Aufgabe H2 (8 Punkte)

Sei $x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + 4$, $n \geq 0$.

(a) Bestimmen Sie x_1, x_2, x_3 und x_4 für $x_0 = 120$.

(b) Zeigen Sie für $x_0 \in \mathbb{R}$ mit vollständiger Induktion

$$x_n = (x_0 - 20) \cdot (\frac{4}{5})^n + 20, \quad n \geq 0.$$

Lösung:

(a) Es gilt: $x_1 = 100$, $x_2 = 84$, $x_3 = 71,2$, $x_4 = 60,96$.

(b) **IA:** Betrachte $n = 0$. Es gilt $x_0 = (x_0 - 20) \cdot (\frac{4}{5})^0 + 20$. Die Aussage ist also wahr für $n = 0$.
IS: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $x_n = (x_0 - 20) \cdot (\frac{4}{5})^n + 20$ (IV).
Behauptung:

$$x_{n+1} = (x_0 - 20) \cdot (\frac{4}{5})^{n+1} + 20.$$

Beweis:

$$x_{n+1} = (\frac{4}{5})x_n + 4 \overset{(IV)}{=} (\frac{4}{5})((x_0 - 20) \cdot (\frac{4}{5})^n + 20) + 4 = (x_0 - 20) \cdot (\frac{4}{5})^{n+1} + 20.$$

Aufgabe H3 (16 Punkte)
Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ für $x \in D(f) = \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = n + 2$ für $n \in D(g) = \mathbb{N}$ und h wie in Aufgabe G2.

(a) Bestimmen Sie die Bildmenge von f und g (Beweis für g!).

(b) Bestimmen Sie $(h \circ f)(\frac{3}{2})$ und $(f \circ h)(\frac{3}{2})$. Können Sie eine explizite Zuordnungsvorschrift für $h \circ f$ angeben?

(c) Sind die Funktionen f und g injektiv? Sind sie surjektiv? Begründen Sie sorgfältig!

(d) Wie kann man die Definitionsmenge und/oder den Wertebereich so verändern (falls notwendig), dass die Funktionen f und g injektiv bzw. surjektiv sind?

Lösung:

(a) Es gilt: $B(f) = [0, \infty[$.
Behauptung: $B(g) = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 3\}$.
Beweis:
„$\subset$“: Sei $m \in B(g)$. Dann existiert ein $\tilde{m} \in D(g) = \mathbb{N}$ mit $g(\tilde{m}) = \tilde{m} + 2 = m$. Daher ist $m \in \{n \in \mathbb{N} : n \geq 3\}$.
„$\supset$“: Sei $m \in \{n \in \mathbb{N} : n \geq 3\}$. Dann gilt $g(m - 2) = m$ und $m - 2 \in D(g)$. Daher gilt $m \in B(g)$.

(b) Es gilt $(h \circ f)(\frac{3}{2}) = 2$ und $(f \circ h)(\frac{3}{2}) = 1$. Wir schreiben $h \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h \circ f = \sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x^2\}$ für $x \in D(h \circ f) = D(f)$.

(c) Die Funktion f ist nicht injektiv, da $f(-1) = 1 = f(1)$ ist. Sie ist auch nicht surjektiv, da $f(x) = x^2 \geq 0$ für $x \in D(f)$ gilt, d.h. es existiert kein $x \in D(f)$ mit $f(x) = -1$.
Behauptung:g ist injektiv.
Beweis: Sei x_1, $x_2 \in D(g)$ mit $x_1 \neq x_2$. Dann gilt $g(x_1) = (x_1 - 2) \neq (x_2 - 2) = f(x_2)$, da $(x_1 - 2) \neq (x_2 - 2)$ aus $x_1 \neq x_2$ folgt.

(d) Wir setzen $\tilde{f} : [0, \infty[\to [0, \infty[$ mit $\tilde{f}(x) = x^2$ für $x \in D(\tilde{f}) = [0, \infty[$. Dann ist $\tilde{f}$ injektiv und surjektiv, d.h. bijektiv.
Offenbar ist $\tilde{g} : \mathbb{N} \to B(g)$ mit $\tilde{g}(n) = n + 2$ für $n \in D(\tilde{g}) = D(g)$ injektiv und surjektiv.