Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
M. Slassi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
31. Oktober 2008

2. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

(a) Schreiben Sie

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{625}$$

als geschlossenen Ausdruck mit dem Summenzeichen.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie die Ausdrücke

$$\sum_{i=1}^{n} n^2, \qquad \sum_{i=1}^{5} i^2, \qquad \sum_{i=1}^{n} 2^2$$

jeweils ohne Summenzeichen und berechnen Sie die jeweiligen Werte.

Lösung:

(a) Es gilt

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{625} = \sum_{k=1}^{25} \frac{1}{k^2}.$$

(b) Wir erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} n^2 = n^3, \qquad \sum_{i=1}^{5} i^2 = 55, \qquad \sum_{i=1}^{n} 2^2 = 4n.$$

Aufgabe G2 ()

Es sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

(a) direkt,

(b) durch vollständige Induktion.

Lösung:

(a) Für $q \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k=0}^{n} \left(q^k - q^{k+1}\right) = 1 - q^{n+1} \\
\Leftrightarrow \quad & 1 - q + q - q^2 + \cdots + q^n - q^{n+1} = 1 - q^{n+1} \\
\Leftrightarrow \quad & 1 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}
\end{aligned}$$

(b) **IA:** Betrachte $n = 0$. Es gilt $\sum_{k=0}^{0} = 1 = \frac{1-q}{1-q}$ (beachte $q \neq 1$). Die Aussage ist also wahr für $n = 0$.
IS: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (IV).
Behauptung:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

Beweis:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

Aufgabe G3 ()

Skizzieren Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$M_1 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 9\}$, $\quad M_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}$, $\quad M_3 = \{n \in \mathbb{N} : 2 \text{ ist Teiler von } n\}$.

(a) Bestimmen Sie

(i) $M_1 \setminus M_2$, (ii) $M_3 \cup M_2$, (iii) $M_1 \cap M_3$

und skizzieren Sie diese Mengen.

(b) Geben Sie für die Mengen M_1, M_2 und M_3 jeweils zwei obere und zwei untere Schranken an, falls diese existieren.

(c) Bestimmen Sie für die Mengen M_1, M_2 und M_3 jeweils Supremum und Infimum, falls sie existieren, und geben Sie an, ob sie in der jeweiligen Menge liegen.

(d) Beweisen Sie $M_2 \subset M_1$.

Lösung:

(a) i. $M_1 \setminus M_2 = \{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\}$,
ii. $M_3 \cup M_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2 \vee x = 2 \cdot n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$,
iii. $M_1 \cap M_3 = \{2\}$.

(b) Betrachte:

- Behauptung: 4 ist obere Schranke von M_1.
Beweis: Es gilt $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 3\}$. Sei $x \in M_1$. Dann gilt $x < 3 < 4$. Wir erhalten insbesondere $x \leq 4$ für alle $x \in M_1$, d. h. 4 ist obere Schranke von M_1.
- Behauptung: Es existiert keine obere Schranke von M_3.
Beweis (Widerspruch):
Annahme: $S \in \mathbb{R}$ ist obere Schranke für M_3.
Sei $m > S$ eine durch 2 teilbare Zahl (wieso existiert diese?). Dann gilt $m \in M_3$ und $m > S \Rightarrow T$ ist keine obere Schranke.

Mit analoger Vorgehensweise erhält man:

M_1:	obere Schranken: 4, 10;	untere Schranken: -4, -10
M_2:	obere Schranken: 42, 531;	untere Schranken: -2, $-\frac{13}{2}$
M_3:	obere Schranken existieren nicht;	untere Schranken: 1, 2

(c) Betrachte:

- Behauptung: 3 ist obere Schranke von M_1.
  Beweis: Es gilt $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 3\}$. Wegen $x < 3$ für alle $x \in M_1$ ist 3 obere Schranke von M_1.
  Behauptung: $\sup M_1 = 3$.
  Beweis (Widerspruch):
  Annahme: Es existiert eine obere Schranke $\tilde{T}$ mit $-3 < \tilde{T} < 3$ (beachte: -3 ist untere Schranke von M_1) $\Rightarrow -3 < \frac{\tilde{T}+3}{2} < 3$, d. h. $\frac{\tilde{T}+3}{2} \in M_1$, aber $\tilde{T} < \frac{\tilde{T}+3}{2} \Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme „$\tilde{T}$ ist obere Schranke von M_1".
  Offensichtlich gilt $3 \notin M_1$, also $\sup M_1 = 3 \notin M_1$.

Mit analoger Vorgehensweise erhält man:

$\sup M_1 = 3 \notin M_1$;	$\inf M_1 = -3 \notin M_1$
$\sup M_2 = 2 \in M_2$;	$\inf M_2 = -2 \in M_2$
$\sup M_3$ existiert nicht;	$\inf M_3 = 2 \in M_3$

(d) Sei $x \in M_2 \Rightarrow x^2 = |x|^2 \leq 4 < 9 \Rightarrow x \in M_1$.

Hinweis zur Hausübung: Für die Aufgaben H3 (a) (i) und (ii) ist es hinreichend, jeweils in einem Fall einen korrekten Beweis aufzuschreiben.

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Lösung: IA: Betrachte $n = 1$. Dann gilt $\sum_{k=1}^{1} 1^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3$. Damit ist die Aussage wahr für $n = 1$.
IS: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV).
Behauptung:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).
\end{aligned}$$

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Für zwei natürliche Zahlen a und b sagen wir „a teilt b", wenn $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$8 \text{ teilt } (9^n - 1).$$

Lösung: **IA:** Betrachte $n = 1$. Dann wird $9^n - 1 = 8$ von 8 geteilt. Die Aussage ist also wahr für $n = 1$.
IS: Für ein $N \in \mathbb{N}$ gelte „8 teilt $9^n - 1$" (IV).
Behauptung: Es gilt „8 teily $9^{n+1} - 1$".
Beweis: Wir erhalten zunächst $9^{n+1} - 1 = 8 \cdot 9^n + 9^n - 1$. Offensichtlich gilt „8 teilt $8 \cdot 9^n$". Aus der Induktionsvoraussetzung folgt „8 teilt $9^n - 1$". Damit folgt die Behauptung.

Aufgabe H3 (6 Punkte)

(a) Betrachten Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$M_1 := [5, \infty[$, $M_2 :=]2, 3]$, M_3 : Menge aller Primzahlen,

M_4 : Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 - 5 > 4$ über den reellen Zahlen.

(i) Geben Sie jeweils zwei obere und zwei untere Schranken an, falls sie existieren.
(ii) Bestimmen Sie, falls vorhanden, jeweils Infimum und Supremum. Liegen sie in der jeweiligen Menge?

(b) Sei $V_k := \{k \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Vielfachen der natürlichen Zahl k. Zeigen Sie die Aussage $V_4 \subset V_2$.

Lösung:

(a) i. M_1: obere Schranken existieren nicht; untere Schranken: 0, -2
M_2: obere Schranken: 4, 1711; untere Schranken: -1, $\frac{1}{2}$
M_3: obere Schranken existieren nicht; untere Schranken: 1, 2
M_4: obere Schranken existieren nicht; untere Schranken existieren nicht

ii. $\sup M_1$ existiert nicht; $\inf M_1 = 5 \in M_1$
$\sup M_2 = 3 \in M_2$; $\inf M_2 = 2 \notin M_2$
$\sup M_3$ existiert nicht; $\inf M_3 = 2 \in M_3$
$\sup M_4$ existiert nicht; $\inf M_4$ existiert nicht

(b) Sei $m \in V_4 \Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : m = 4l = 2 \cdot 2l \Rightarrow m \in V_2$, da $2l \in \mathbb{N}$.