Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
2. März 2009

15. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel oder der partiellen Integration:

$$\text{(a)} \int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(c)} \int_0^2 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: (a) Mit partieller Integration ergibt sich

$$\int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}x = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = 1.$$

(b) Mit der Identität $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und Anwendung der Substitutionsregel mit $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D(f) = B(g)$, und $g(x) = \cos(x)$, $D(g) = [0, \frac{\pi}{3}]$, erhalten wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(|x|)]_{\frac{1}{2}}^1 = -\ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

(c) Anwendung der Substitutionsregel mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in D(f) = B(g)$, und $g(x) = x^3 + 1$, $D(g) = [0, 2]$, liefert

$$\int_0^2 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\left[\sqrt{x}\right]_1^9 = 4.$$

Aufgabe G2 ()

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

für $x \in D(f) = \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.
Hinweis: Vergleichskriterium!
Vorschlag für Interessierte: Versuchen Sie, diese Funktion auf Ihrem Computer numerisch zu integrieren, z.B. mit der Mittelpunktregel.

Lösung: Für $x \in [-1,1]$ gilt $0 \le f(x) \le 1$. Für $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ gilt $0 \le f(x) \le \exp(-|x|)$. Wir betrachten nun das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|x|)\,\mathrm{d}x$. Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|x|)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} \exp(-x)\,\mathrm{d}x = 2\lim_{t\to\infty}\left[-\exp(-x)\right]_0^t = 2 - \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 2.$$

Nach dem Vergleichskriterium folgt deshalb, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.

Aufgabe G3 ()

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$$

für $x \in D(f) = [\pi, \infty[$. Zeigen Sie, dass f über $[\pi, \infty[$ nicht uneigentlich integrierbar ist.
Hinweis: Die Folge $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Lösung: Wir betrachten zunächst Integrale auf beschränkten Intervallen. Es gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{i\pi}^{(i+1)\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,\mathrm{d}x \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)\pi} \int\limits_{i\pi}^{(i+1)\pi} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)\pi}.$$

Gemäß dem Hinweis und dem Vergleichskriterium gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Da $\lim_{n\to\infty} n\pi = \infty$, impliziert dies, dass das uneigentliche Integral von f nicht existiert.

Hausübung

Aufgabe H1 ()

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \int_1^e x\ln(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{(b)} \int_2^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x, \quad \text{(c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{(d)} \int_1^2 \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis zu (d): Verwenden Sie den Ansatz $\frac{1}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Lösung: (a) Mit partieller Integration erhalten wir

$$\int_1^e x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{1}{4}x^2\,\mathrm{d}x\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$$

(b) Anwendung der Substitutionsregel mit $f(x) = \frac{1}{x}$, $D(f) = B(g)$, und $g(x) = \ln(x)$, $D(g) = [2, e^2]$, ergibt

$$\int_2^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln(\ln(x))]_2^{e^2} = \ln(2) - \ln(\ln(2)).$$

(c) Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \left[-x^2\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-x^2\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\,[x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-x^2\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\,[x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\,[\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi - 2.
\end{aligned}$$

(d) Koeffinzientenvergleich ergibt $A = 1$ und $B = -1$. Damit erhält man

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = [\ln(|x|)]_1^2 + [\ln(|x+1|)]_1^2 = \ln(3).$$

Aufgabe H2 ()

Untersuchen Sie die Existenz der folgenden uneigentlichen Integrale und bestimmen Sie gegebenenfalls das Integral:

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: (a) Auf dem Intervall $[-1, 1]$ gilt $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$. Auf $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ gilt $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Da zudem für alle $x \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{1+x^2} > 0$, existiert das uneigentliche Integral nach dem Vergleichskriterium. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} [\arctan x]_a^0 + \lim_{b\to\infty} [\arctan x]_0^b \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

(b) Für alle $x \in [1, \infty[$ gilt $\frac{\ln(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ und $\frac{\ln(x)}{x^2} \geq 0$. Nach dem Vergleichskriterium existiert das uneigentliche Integral. Es gilt

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^a - \int_1^a -\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = 1.$$

Aufgabe H3 ()

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

für $x \in D(f) =]0, \infty[$. Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert.

Lösung: Es gilt für $\alpha \neq 0$

$$\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}\left[\lim_{t\to 0} x^{\alpha+1}\right]_t^1 = \frac{1}{\alpha+1}\left(1 - \lim_{t\to 0} t^{\alpha+1}\right).$$

1. Fall: $\alpha > -1$.
Es gilt $\lim_{t\to 0} t^{\alpha+1} = 0$. Daher existiert das uneigentliche Integral für $\alpha > -1$.
2. Fall: $\alpha < -1$.
Es gilt $\lim_{t\to 0} t^{\alpha+1} = \infty$. Daher existiert das uneigentliche Integral für $\alpha < -1$ nicht.
3. Fall: $\alpha = -1$.
Es gilt

$$\int_0^1 x^{-1}\,\mathrm{d}x = \left[\lim_{t\to 0} \ln(|x|)\right]_t^1 = -\lim_{t\to 0} \ln(t) = \infty.$$

Daher existiert das uneigentliche Integral für $\alpha = -1$ nicht.