Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
13. Februar 2009

14. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI"

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel und der partiellen Integration.

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{6x^2+4}{x^3+2x+1}\,\mathrm{d}x,\ \text{(b)} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x,\ \text{(c)} \int_0^{\pi} e^{\sin(x)}\cos(x)\,\mathrm{d}x,\ \text{(d)} \int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$$

Lösung: (a) Substitutionsregel mit $f(x) = \frac{2}{x}$ für $x \in D(f) = B(g)$ und $g(x) = x^3 + 2x + 1$ für $x \in [0,1]$ (vgl. Vorlesung bzw. Arbeitsbuch Satz 23.4):

$$\int_0^1 \frac{6x^2+4}{x^3+2x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int_1^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2\cdot[\ln(x)]_1^4 = 2\ln(4).$$

(b) Mit der Identität $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ und mit Hilfe der partiellen Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2(x) &= [-\sin(x)\cos(x)]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 1-\sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}.$$

(c) Mit Hilfe der Substitutionsregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x + \int_1^0 e^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(d) Anwendung der Substitution mit $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x \in D(f) = B(g)$ und $g(x) = x^2 + 2x + 2$ für $x \in D(g) = [0, 2]$ ergibt wie in (a)

$$\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\,\mathrm{d}x = \int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{t}\right]_2^{10} = \sqrt{10} - \sqrt{2}.$$

Aufgabe G2 ()

Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

mittels Partialbruchzerlegung. Bestimmen Sie also $A, B, C \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1}$$

gilt, und lösen Sie die beiden neuen Integrale mittels Substitution.

Lösung: Koeffizientenvergleich liefert $A = 1$, $B = -1$ und $C = 0$. Folglich gilt

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Mit der Substitution $f(x) = \frac{1}{2x}$ für $x \in D(f) = B(g)$ und $g(x) = \sqrt{y-1}$ für $x \in [1, 2]$ erhalten wir

$$\int_1^2 \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 2$$

und damit

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Aufgabe G3 ()

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{\sin^2(y) + y\cos^4(y)}}{e^{\pi y} + \arcsin^2(y)}\,\mathrm{d}y$$

für $x \in D(f) = [1, 5]$. Bestimmen Sie die Ableitung f'.

Lösung: Da $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(y) = \frac{\sqrt{\sin^2 y + y\cos^4 y}}{e^{\pi y} + \arcsin^2 y}$ für $y \in D(g) = [1, 5]$ stetig ist, ist f nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine Stammfunktion von g und es gilt $f' = g$.

Hausübung

Aufgabe H1 ()

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

$$\text{(a)} \int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \quad \text{(b)} \int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{(c)} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x, \quad \text{(d)} \int_0^1 x\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Hinweis zu (c): Verwenden Sie, dass $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösung: (a) Mit der Substitution $f(x) = 2xe^x$ für $x \in D(f) = B(g)$ und $g(x) = \sqrt{x}$ für $x \in [1,4]$ und anschließender partieller Integration folgt

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 2xe^x\,\mathrm{d}x = 2te^x - 2\int_1^2 e^x\,\mathrm{d}x = 2e^2.$$

(b) Mit partieller Integration erhält man

$$\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,dx = [\sin(x)\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

und damit

$$\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(c) Mit der Substitution $f(x) = \sin^2(x)$ für $x \in D(f) = B(g)$ und $g(x) = \arcsin(x)$ für $x \in D(g) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ erhalten wir mit Hilfe der Aufgabe G1 (b)

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}.$$

(d) Partielle Integration ergibt

$$\int_0^1 x\sin(x)\,\mathrm{d}x = [-x\cos(x)]_0^1 - \int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(1) - \cos(1).$$

Aufgabe H2 ()

Bestimmen Sie

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+2)(x^2-4)}\,\mathrm{d}x$$

mit dem Ansatz

$$\frac{x}{(x+2)(x^2-4)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x-2)}$$

für geeignete $A, B, C \in \mathbb{R}$ (vgl. G2).

Lösung: Koeffizientenvergleich liefert $A = -\frac{1}{8}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{8}$. Folglich gilt

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+2)(x^2-4)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{1}{8(x+2)} + \frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{8(x-2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12} - \frac{1}{8}\ln(3).$$

Aufgabe H3 ()

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

für $x \in D(f) = [0,1]$ nicht integrierbar ist.
Hinweis: Berechnen Sie die Ober- und die Untersumme.

Lösung: Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Zerlegung von $[0,1]$. Dann gilt für $i = 1, \ldots, n$

$$\overline{m}_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0$$

und

$$\underline{m}_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1.$$

Damit ist die Obersumme von f bzgl. Z

$$\overline{S}_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i(f)(x_i - x_{i-1}) = 1$$

und die Untersumme von f bzgl Z

$$\underline{S}_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} \underline{m}_i(f)(x_i - x_{i-1}) = 0.$$

Somit ist

$$\overline{I}(f) = \sup\{\overline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } [0,1]\} = 1$$

und

$$\underline{I}(f) = \inf\{\underline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } [0,1]\} = 0.$$

Folglich kann f nicht integrierbar sein.