Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
30. Januar 2009

12. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

für $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

(a) Untersuchen Sie, in welchen Punkten die Funktion differenzierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

(b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten die Funktion zweimal differenzierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls die zweite Ableitung.

Lösung: (a) Für $x_0 < 0$ und $x_0 > 0$ wissen wir bereits, dass die Funktion f in x_0 stetig und differenzierbar ist. Für $x_0 = 0$ und $x > 0$ gilt

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2}{x} = x$$

und für $x < 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Wir erhalten also

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Damit ist f differenzierbar und die Ableitung $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$$

für $x \in D(f') = \mathbb{R}$.
(b) Für $x_0 < 0$ und $x_0 > 0$ wissen wir bereits, dass die Funktion f' in x_0 stetig und differenzierbar ist. Es gilt $f''(x_0) = 0$ für $x_0 < 0$ und $f''(x_0) = 2$ für $x_0 > 0$. Für $x_0 = 0$ und $x > 0$ gilt

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{2x}{x} = 2$$

und für $x < 0$
$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 0.$$
Damit ist f' in 0 nicht differenzierbar sein.

Aufgabe G2 ()
Bestimmen Sie nur mit Hilfe der ersten Ableitung alle Extremstellen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x - 2$$
für $x \in D(f) = [-5, 3]$. Welche der Extremstellen sind globale Extremstellen?

Lösung: Damit f eine Extremstelle in $x_0 \in]-5, 3[$ besitzt, muss $f'(x_0) = 0$ gelten. Wegen $f'(x) = 3x^2 + 10x - \frac{11}{3}$ gilt $f'(x_0) = 0$ genau dann, wenn $x_0 = \frac{1}{3}$ oder $x_0 = -\frac{11}{3}$. Da f' eine nach oben geöffnete Parabel ist, gilt $f'(x) < 0$ für $-\frac{11}{3} < x < \frac{1}{3}$ und $f'(x) > 0$ für $x < -\frac{11}{3}$ oder $x > \frac{1}{3}$. Damit ist f auf $]-5, -\frac{11}{3}[$ monoton steigend und auf $]-\frac{11}{3}, \frac{1}{3}[$ monoton fallend. Somit liegt in $-\frac{11}{3}$ ein lokales Maximum von f vor. Analog sieht man, dass $\frac{1}{3}$ ein lokales Minimum ist.
Da die Funktion auf dem Intervall $]-5, -\frac{11}{3}[$ monoton steigt, ist der Randpunkt -5 ein lokales Minimum. Analog ist 3 ein lokales Maximum. Vergleicht man die Funktionswerte ($f(-5) = 16\frac{1}{3}$, $f(-\frac{11}{3}) = 29\frac{10}{27}$, $f(\frac{1}{3}) = -2\frac{17}{27}$, $f(3) = 59$), ergibt sich, dass in 3 ein globales Maximum und in $\frac{1}{3}$ ein globales Minimum vorliegt.

Aufgabe G3 ()
Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.
$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 1-} \frac{\cos(\pi x) + 1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{(c)} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x}$$

Lösung: (a) Da $\lim_{x\to 0} \sin(2x) = \lim_{x\to 0} \sin(3x) = 0$ gilt, können wir die Regel von l'Hospital anwenden. Es gilt also
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{3\cos(3x)} = \frac{2}{3}.$$
(b) Da $\lim_{x\to 1-} \cos(\pi x) + 1 = \lim_{x\to 1-} \sqrt{1 - x^2} = 0$ gilt, können wir die Regel von l'Hospital anwenden. Es gilt also
$$\lim_{x\to 1-} \frac{\cos(\pi x) + 1}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x\to 1-} \frac{-\pi \sin(\pi x)\sqrt{1 - x^2}}{-2x} = 0.$$
(c) Da $\lim_{x\to 0} = 0$ und $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ gilt, ist
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x} = \infty.$$
(Die Regel von l'Hospital können hier nicht angewandt werden, da die Voraussetzungen nicht erfüllt sind.)

Aufgabe G4 ()
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch
$$f(x) = \frac{1}{1 + 4x^2}$$
für $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|f'(x)| \le 2$.

(b) Folgern Sie damit, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|$ gilt.

(c) Beweisen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Lösung: (a) Es gilt $f'(x) = -\frac{8x}{(1+4x^2)^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.
Wegen $4(x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$ gilt $4x^2 + 1 \geq 4x$. Analog erhalten wir $4x^2 + 1 \geq -4x$. Beide Ungleichungen zusammen ergeben $x^2 - |x| + \frac{1}{4} \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit $4|x| \leq 1 + 4x^2$. Da $1 + 4x^2 \geq 1$ gilt, ist $4|x| \leq (1 + 4x^2)^2$ und somit $8|x| \leq 2(1 + 4x^2)^2$. Insgesamt erhalten wir $|f'(x)| = \frac{8|x|}{(1+4x^2)^2} \leq 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
(b) Nach dem Mittelwertsatz existiert für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ein $x_0 \in]x, y[$ mit $f(x) - f(y) = f'(x_0)(x - y)$ und somit nach Aufgabenteil (a)

$$|f(x) - f(y)| = |f'(x_0)||x - y| \leq 2|x - y|.$$

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Setzen wir $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, erhalten wir mit (b) für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq 2|x - y| < 2\delta = \varepsilon.$$

Hausübung

Aufgabe H1 ()

Bestimmen Sie nur mit Hilfe der ersten Ableitung alle Extremstellen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

für $x \in D(f) = [-5, 5]$. Welche der Extremstellen sind globale Extremstellen?

Lösung: Die Funktion f ist differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Damit besitzt f' die beiden Nullstellen -1 und 1. Außerdem gilt $1-x^2 < 0$ für $x > 1$ oder $x < -1$ und $1-x^2 > 0$ für $-1 < x < 1$. Mit der gleichen Monotoniebetrachtung wie in G2 sehen wir, dass die Funktion lokale Minima bei -1 und 5 und lokale Maxima bei 1 und -5 besitzt. Ein Vergleich der Funktionswerte zeigt, dass -1 das globale Minimum ist und 1 das globale Maximum.

Aufgabe H2 ()

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

für $x \in D(f) = [0, \frac{\pi}{2}[$.

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Sei $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass ein $x_0 \in]0, x[$ existiert mit

$$\frac{\tan x}{x} = \tan'(x_0).$$

(c) Bestimmen Sie die Ableitung von $\tan x_0$ für $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

(d) Zeigen Sie, dass für alle $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ die Ungleichung

$$\tan x > x$$

gilt.

Lösung: (a) Da der Tangens stetig ist, ist f auch in $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ stetig. Nach Übung 8 Aufgabe G3, ist f in 0 stetig.

(b) Mit dem Mittelwertsatz erhalten wir, dass für alle $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ein $x_0 \in]0, x[$ existiert mit

$$\tan x - \tan 0 = \tan'(x_0)(x-0).$$

(c) Für $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ gilt

$$\tan' x_0 = \frac{\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}.$$

(Richtig ist auch $\tan' x_0 = 1 + \tan^2 x_0$.)

(d) Sei $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, dann existiert nach (b) ein $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ mit $\frac{\tan x}{x} = \tan' x_0$. Mit (c) erhalten wir

$$\frac{\tan x}{x} = \tan' x_0 \geq 1.$$

Aufgabe H3 ()

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [a, b]$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung stetig ist.

(a) Zeigen Sie, dass ein $L > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D(f)$ gilt: $|f'(x)| \leq L$.

(b) Folgern Sie, dass für alle $x, y \in D(f)$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ gilt.

(c) Beweisen Sie nun, dass f gleichmäßig stetig ist.

Hinweis: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ ihr Minimum und Maximum annimmt.

Lösung: (a) Da die Ableitung von f stetig ist, nimmt sie dem Hinweis nach ihr Maximum und Minimum an, folglich ist sie insbesondere beschränkt. Das heißt aber nichts anderes, als dass ein $L > 0$ existiert mit $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in D(f)$.
(b) Der Mittelwertsatz liefert, dass für alle $x, y \in D(f)$ ein $x_0 \in]x, y[$ existiert mit $f(x) - f(y) = f'(x_0)(x - y)$ und somit

$$|f(x) - f(y)| = |f'(x_0)||x - y| \leq L|x - y|.$$

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Setzen wir $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, erhalten wir nach (b) für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = \varepsilon.$$