Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
19. Januar 2009

10. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

für $x \in D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

(a) Zeigen Sie mit dem ε-δ-Kriterium, dass f stetig ist.

(b) Untersuchen Sie f auf gleichmäßige Stetigkeit.

Lösung: (a) Seien $\varepsilon > 0$ und $x \in D(f)$. Weiter sei $y \in D(f)$ mit $|x - y| < \frac{x}{2}$. Insbesondere ist $y > \frac{x}{2}$. Es gilt

$$|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = \frac{1}{xy}|x - y| < \frac{2}{x^2}|x - y|.$$

Wählen wir $\delta = \inf\{\frac{x}{2}, \frac{\varepsilon x^2}{2}\}$, so erhalten wir für alle $y \in D(f)$ mit $|x - y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| < \frac{2}{x^2}|x - y| < \frac{2}{x^2}\delta \leq \frac{2}{x^2}\frac{\varepsilon x^2}{2} = \varepsilon.$$

(b) Behauptung: Die Funktion f ist nicht gleichmäßig stetig.
Beweis: Durch Negation der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit einer Funktion erhalten wir, dass f genau dann nicht gleichmäßig stetig ist, falls

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;\forall\, \delta > 0 \;\exists\, x, y \in D(f) : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Wir setzen $\varepsilon = 1$, $x = \delta$, $y = \frac{\delta}{2}$. Es gilt $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Wir können annehmen, dass $\delta < 1$ ist (warum?).

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{xy}|x - y| = \frac{2}{\delta^2}\frac{\delta}{2} = \frac{1}{\delta} \geq \varepsilon$$

Aufgabe G2 ()

Untersuchen Sie, wie viele Lösungen $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\sin x = \frac{2}{5}$$

besitzt. Bestimmen Sie eine Lösung numerisch mit einer Genauigkeit von $4 \cdot 10^{-2}$.

Lösung: Wie betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sin x - \frac{2}{5}$$

für $x \in D(f) = \mathbb{R}$. Es gilt $f(0) = -\frac{2}{5} < 0$ und $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{5} > 0$. Die Funktion f besitzt also nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $[0, 2\pi[$. Weiterhin ist f 2π-periodisch, besitzt also in jedem Intervall $[2\pi k, 2\pi(k+1)[$, $k \in \mathbb{Z}$, eine Nullstelle. Damit existieren unendlich viele Lösungen der obigen Gleichung.
Wir wenden das Bisektionsverfahren an und betrachten dazu das Intervall $[0, \frac{1}{2}]$. Es gilt $f(0) < 0$ und $f(\frac{1}{2}) > 0$. Die Funktion f besitzt also in diesem Intervall eine Nullstelle. Wie in der Vorlesung beschrieben wurde, ist der Fehler im n-ten Schritt höchstens $\frac{1}{2 \cdot 2^n}$. Wir benötigen also 4 Schritte, um die geforderte Genauigkeit zu erreichen.

n	a_n	b_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(\frac{a_n+b_n}{2})$
0	0	0,5	$-$	$+$	$-$
1	0,25	0,5	$-$	$+$	$-$
2	0,375	0,4375	$-$	$+$	$+$
3	0,375	0,4375	$-$	$+$	$-$
4	0,40625	0,4375			

Somit ist z. B. $x_0 = 0,41$ eine Näherungslösung für die Gleichung $\sin x = \frac{2}{5}$ mit einem Fehler kleiner als $4 \cdot 10^{-2}$.

Aufgabe G3 ()

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^2$$

für $x \in D(f) = [0, 1]$.

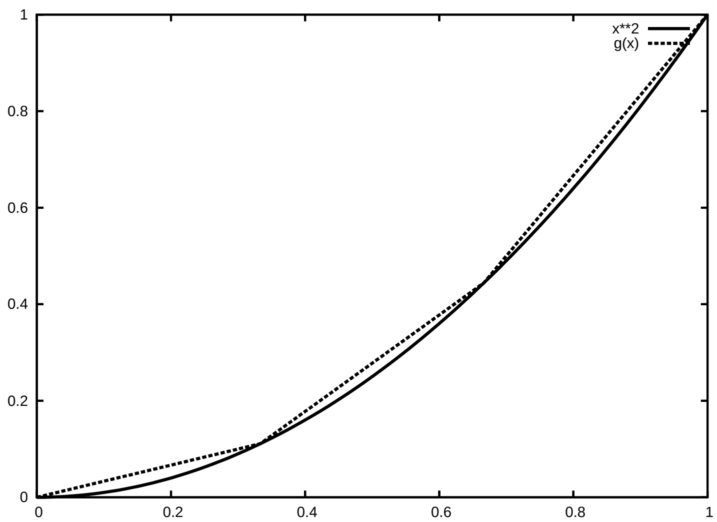
(a) Geben Sie die stückweise lineare Interpolation g_n für $n = 3$ von f an. Skizzieren Sie die Graphen von f und g_3.

(b) Bestimmen Sie die Feinheit der Zerlegung, so dass der Fehler $|f(x) - g_n(x)|$ für alle $x \in [0, 1]$ kleiner als 10^{-2} ist.

Lösung: (a) Nach der Vorlesung gilt mit der Zerlegung $t_k = \frac{k}{3}$, $k = 0, \ldots, 3$,

$$g_3(x) = 3(t_{k+1} - x)f(t_k) + 3(x - t_k)f(t_k + 1)$$

für $x \in [t_k, t_{k+1}]$.



(b) Wir betrachten die Funktion f auf dem Intervall $[0,1]$. Wie aus der Vorlesung bekannt ist, gilt für alle $\varepsilon > 0$, $\delta = \inf\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$ und für alle $x \in [0,1]$

$$|f(x) - g_n(x)| \leq \varepsilon,$$

falls $\frac{1}{n} < \delta$. Setzen wir $\varepsilon = 10^{-2}$, ist $\delta = 3 \cdot 10^{-2}$. Somit erhalten wir die gesuchte Genauigkeit beispielsweise bei $n = 301$.

Hausübung

Aufgabe H1 ()

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt{x}$$

für $x \in D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

(a) Zeigen Sie mit dem ε-δ-Kriterium, dass f stetig ist.

(b) Untersuchen Sie f auf gleichmäßige Stetigkeit.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(g_n) = [0, 1]$ die stückweise lineare Interpolation von f auf dem Intervall $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Feinheit der Zerlegung, so dass der Fehler $|f(x)-g_n(x)|$ für alle $x \in [0, 1]$ kleiner als 10^{-2} ist.

Lösung: (a) Wie in der 5. Übung Aufgabe G2 gezeigt wurde, gilt

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Setzen wir $\delta = \varepsilon^2$, so erhalten wir für $y \in D(f)$ mit $|x - y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

(b) Wir haben in Aufgabenteil (a) δ unabhängig von x gewählt. Somit ist f gleichmäßig stetig.

(c) Nach der Vorlesung erhält man für

$$\frac{1}{n} < \delta, \text{ wobei nach (b)} \quad \delta := \varepsilon^2 \text{ ist,}$$

dass der Approximationsfehler kleiner als ε ist.

So ist für $n = 10^4 + 1$ die gesuchte Genauigkeit erreicht.

Aufgabe H2 ()

Untersuchen Sie, wie viele Lösungen $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$3 \cos x = \sin 3x$$

besitzt. Bestimmen Sie eine Näherungslösung numerisch mit einer Genauigkeit von $3 \cdot 10^{-2}$.

Lösung: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 3 \cos x - \sin 3x$ für $x \in D(f) = \mathbb{R}$. Es gilt $f(0) = 3$ und $f(\pi) = -3$. Die Funktion f besitzt also nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $[0, 2\pi[$. Weiterhin ist f 2π-periodisch (warum?), besitzt also in jedem Intervall $[2\pi k, 2\pi(k + 1)[$, $k \in \mathbb{Z}$, eine Nullstelle. Damit existieren unendlich viele Lösungen der obigen Gleichung.
Wir wenden das Bisektionsverfahren an und betrachten dazu das Intervall $[0, \pi]$. Es gilt $f(0) < 0$ und $f(\pi) > 0$. Die Funktion f besitzt also in diesem Intervall eine Nullstelle. Wie in der Vorlesung beschrieben wurde, ist der Fehler im n-ten Schritt höchstens $\frac{\pi}{2^n}$. Wir benötigen also 7 Schritte, um die geforderte Genauigkeit zu erreichen.

n	a_n	b_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(\frac{a_n+b_n}{2})$
0	0	π	$+$	$-$	$+$
1	$\frac{\pi}{2}$	π	$+$	$-$	$-$
2	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	$+$	$-$	$+$
3	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{8}\pi$	$+$	$-$	$+$
4	$\frac{9}{16}\pi$	$\frac{5}{8}\pi$	$+$	$-$	$-$
5	$\frac{9}{16}\pi$	$\frac{19}{32}\pi$	$+$	$-$	$+$
6	$\frac{37}{64}\pi$	$\frac{19}{32}\pi$	$+$	$-$	$-$
7	$\frac{37}{64}\pi$	$\frac{75}{128}\pi$			

Somit ist z. B. $x_0 = \frac{37}{64}\pi$ eine Näherungslösung für die Gleichung $3\cos x = \sin 3x$ mit einem Fehler kleiner als $3 \cdot 10^{-2}$.

Aufgabe H3 ()

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [0, 1]$ stetig und es gelte $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass ein $x \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert mit $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.

(b) Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(g) = \mathbb{R}$, so dass die Bildmenge endlich ist.

Lösung: (a) Wir betrachten die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$ für $x \in D(h) = [0, \frac{1}{2}]$. Dann gilt

$$h(0) = f(0) - f(\frac{1}{2})$$

und

$$h(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(1) = f(\frac{1}{2}) - f(0) = -h(0).$$

1. Fall: $h(0) = 0$. Dann gilt $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$ für $x = 0$ und für $x = \frac{1}{2}$.
2. Fall $h(0) > 0$. Dann ist $h(\frac{1}{2}) < 0$ und mit dem Zwischenwertsatz erhalten wir ein $x \in]0, \frac{1}{2}[$ mit $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.
3. Fall $h(0) < 0$. Analog zum zweiten Fall.

(b) Behauptung: Nur konstante Funktionen erfüllen die geforderten Eigenschaften.
Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch Widerspruch.
Annahme: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ eine stetige, nicht konstante Funktion mit endlicher Bildmenge.
Damit existiert ein $y \in \mathbb{R} \setminus B(f)$ mit

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) < y < \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

Nach dem Zwischenwertsatz muss aber ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$ existieren. Dies ist ein Widerspruch.