Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
M. Slassi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009

1. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und UI"

Vorbemerkungen

Wir betrachten die Aussage A (z. B. „Es regnet.") und die Aussage B (z. B. „Die Straße ist nass."). Wenn aus der Gültigkeit der Aussage A die Gültigkeit von Aussage B folgt, so sagen wir „A impliziert B" und schreiben

$$A \Rightarrow B.$$

Gilt die Implikation $A \Rightarrow B$, so ist die *Kontraposition* (wenn B nicht gilt, gilt auch A nicht) ebenfalls richtig. Der *Umkehrschluss* von $A \Rightarrow B$ ist $B \Rightarrow A$. Im Allgemeinen gibt es keinen Zusammenhang zwischen der Gültigkeit der Implikation und der des Umkehrschlusses (siehe dazu Aufgabe H4).

Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge aller reellen und mit $\mathbb{N}$ die Menge aller natürlichen Zahlen.

Hausübung

Aufgabe H1 (Einfache Umformungen)

Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, so dass folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllt sind:

(a) $\frac{x-4}{x^2-9} \leq 0,\ x \neq \pm 3,$ (b) $\frac{3x-1}{(x-4)^2} = \frac{1}{2},\ x \neq 4,$

(c) $|x-5| + x \leq 7,$ (d) $x^3 - 4x \leq (x-2)(x+4)^2.$

Lösung: (a) Fall 1: $x^2 - 9 > 0$, d. h. $|x| > 3$. Wir erhalten folgende Äquivalenzumformungen:

$$\frac{x-4}{x^2-9} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 4 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 4.$$

Die letzte Ungleichung ist mit der Voraussetzung $|x| > 3$ genau dann erfüllt, wenn $x \in \{x \in \mathbb{R} : x < -3 \text{ oder } 3 < x \leq 4\}$.

Fall 2: $x^2 - 9 < 0$, d. h. $|x| < 3$. Wir erhalten

$$\frac{x-4}{x^2-9} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 4.$$

Kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt die letzte Ungleichung und die Voraussetzung $|x| < 3$.

Insgesamt ist die Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{R} : 3 < x \leq 4 \text{ oder } x < -3\}$.

(b) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{3x-1}{(x-4)^2} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 14x + 18 = 0. \end{aligned}$$

Die p-q-Formel liefert die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{31}.$$

(c) Fall 1: $x - 5 \geq 0$, d. h. $x \geq 5$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & |x-5| + x \leq 7 \\ \Leftrightarrow \quad & x - 5 + x \leq 7 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq 6. \end{aligned}$$

Fall 2: $x - 5 < 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & |x-5| + x \leq 7 \\ \Leftrightarrow \quad & -x + 5 + x \leq 7 \\ \Leftrightarrow \quad & 5 \leq 7. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir, dass für $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung genau dann erfüllt ist, falls $x \leq 6$.
(d) Fall 1: Für $x = 2$ ist die Ungleichung erfüllt.
Fall 2: $x - 2 > 0$, d. h. $x > 2$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} & x^3 - 4x \leq (x-2)(x+4)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x(x-2)(x+2) \leq (x-2)(x+4)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 6x + 16 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Fall 3: $x - 2 < 0$, d. h. $x < 2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & x^3 - 4x \leq (x-2)(x+4)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 6x + 16 \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt die Ungleichung also für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq -\frac{8}{3}$ oder $x \geq 2$.

Aufgabe H2 (Die Kontraposition)
Bilden Sie die Kontraposition der folgenden Aussagen:

(a) Wenn es regnet, ist die Straße nass.

(b) Wenn das Auto fährt, ist der Tank nicht leer.

(c) Wenn p eine Primzahl ist, dann gilt $p = 2$ oder p ist ungerade.

Lösung:

(a) Wenn die Straße nicht nass ist, regnet es nicht.

(b) Wenn der Tank leer ist, fährt das Auto nicht.

(c) Wenn p weder 2 noch ungerade ist, so ist p keine Primzahl.

Aufgabe H3 (Quantoren)
Überlegen Sie sich, welche der folgenden Aussagen stimmen und was die Unterschiede zwischen (a)(i) und (a)(ii) bzw. zwischen (b)(i) und (b)(ii) sind.

(a) (i) Für alle Autos gibt es einen Motor.
(ii) Es gibt einen Motor für alle Autos.

(b) (i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $x \leq n$ gilt.
(ii) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x \leq n$ gilt.

Bemerkung: Statt „für alle" wird in der Mathematik häufig der *Allquantor* $\forall$ und statt „es existiert" der *Existenzquantor* $\exists$ benutzt. So kann die Aussage (b)(i) auch als $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N} : x \leq n$ geschrieben werden.

Lösung: Die Aussage (a)(i) ist richtig. Die Aussage (a)(ii) hingegen ist falsch, denn sie besagt, dass es nur einen einzigen Motor für alle Autos gibt.
Die Aussage (b)(i) ist richtig. Betrachtet man ein $x \in \mathbb{R}$ und setzt n als die nächst größere natürliche Zahl, so gilt $x \leq n$. Die zweite Aussage (b)(ii) ist falsch. Denn gäbe es ein solches $n \in \mathbb{N}$, dann setzen wir $x := n + 1 \in \mathbb{R}$ und erhalten einen Widerspruch dazu, dass $x \leq n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Insbesondere sehen wir, dass zwischen

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N} : x \leq n$$

und

$$\exists\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : x \leq n$$

ein Unterschied besteht. Die Reihenfolge der Quantoren ist wichtig.

Aufgabe H4 (Der Umkehrschluss)
a) Sie stehen vor einer geschlossenen, funktionsfähigen Tür, für die Sie keinen Schlüssel besitzen. Betrachten Sie die Implikation:

Die Tür ist abgeschlossen $\Rightarrow$ Die Tür kann nicht geöffnet werden.

Überlegen Sie sich, wie der Umkehrschluss lautet und ob dieser wahr oder falsch ist.
b) Bilden Sie von der Aussage

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x < -1 \Rightarrow x$ ist negativ

den Umkehrschluss. Was können Sie hier über die Richtigkeit sagen?

Lösung: a) Der Umkehrschluss lautet:

Die Tür kann nicht geöffnet werden $\Rightarrow$ Die Tür ist abgeschlossen.

Da wir von einer funktionsfähigen Tür ausgehen, muss die Tür abgeschlossen sein, falls sie nicht zu öffnen ist. Also ist der Umkehrschluss richtig.

b) Der Umkehrschluss lautet:

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: x ist negativ $\Rightarrow x < -1$.

Der Umkehrschluss ist falsch, da $-\frac{1}{2}$ negativ, aber nicht kleiner als -1 ist.

Wir sehen, dass im Allgemeinen kein Zusammenhang zwischen der Gültigkeit der Implikation und der des Umkehrschlusses existiert.