



Mathematik I für ET, WI(ET), SpInf, iSt, BEEd.ET, CE

9. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 34) (Minitest)

Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.

Aus welchen der folgenden Aussagen folgt die Stetigkeit von f in x_0 ?

(Du solltest nicht länger als **10 Minuten** für den Minitest benötigen.)

- $(\exists \varepsilon > 0) (\forall \delta > 0) (\forall x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$
- Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n).$
- $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in D : |x - x_0| < \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta.$
- $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$
- $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x, y \in D : |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$
- Es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, so daß
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ ist.

LÖSUNG:

- $(\exists \varepsilon > 0) (\forall \delta > 0) (\forall x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$
- Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n).$
- $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in D : |x - x_0| < \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta.$
- $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$
- $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x, y \in D : |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$
- Es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, so dass
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ ist.

(G 35) (Stetigkeit)

Die Funktion f ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}(1 - \sqrt{1+x}) & \text{für } x > 0 \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Zeige, dass f stetig auf $(0, \infty)$ ist und bestimme a , so dass f stetig auf $[0, \infty)$ ist.

LÖSUNG:

Für $x > 0$ ist die Funktion f die Summe und Produkt der stetigen Funktionen, daher ist sie stetig. Als nächste rechnen wir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ aus. Es gilt für $x > 0$

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} = \frac{(1 - \sqrt{1+x})(1 + \sqrt{1+x})}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{1+x})} = -\frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x+1}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Daraus folgt, dass f auf $[0, \infty)$ genau dann stetig ist, wenn $a = 0$ ist.

(G 36) (Folgen in \mathbb{R}^n und Stetigkeit der Vektorfunktionen)

a) Wir betrachten die folgenden Folgen in \mathbb{R}^2 :

$$a_n = (n, \frac{1}{n})^T, \quad b_n = (\frac{1}{n^2}, \frac{n}{1+n})^T, \quad c_n = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2})^T, \quad d_n = (\sin(\frac{n\pi}{4}), \cos(\frac{n\pi}{4}))^T.$$

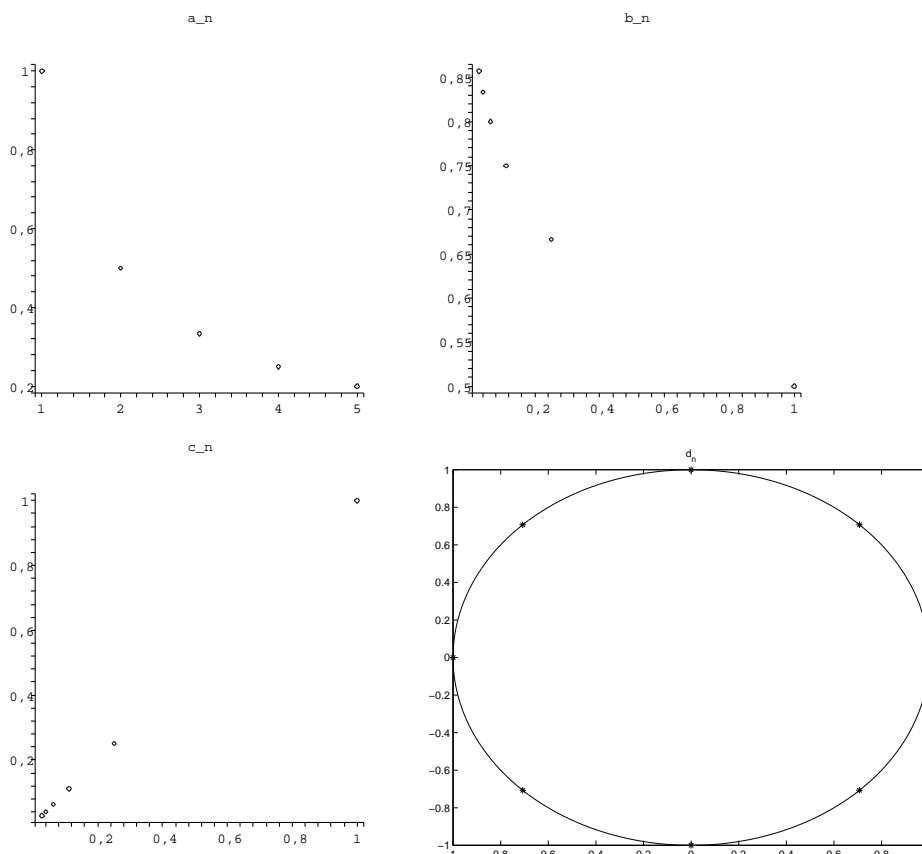
- 1) Skizziere diese Folgen und entscheide welche von ihnen beschränkt sind.
- 2) Welche dieser Folgen sind konvergent und welche nicht? Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

b) Skizziere die zu den folgenden Vektorfunktionen $F(t) = (F_1(t), F_2(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gehörenden Punktmengen $\{(F_1(t), F_2(t)) \in \mathbb{R}^2, t \in D(F)\}$. Sind diese Vektorfunktionen stetig?

- 1) $F(t) = A + Bt, t \in [0, 1]$ mit $A, B \in \mathbb{R}^2$,
- 2) $F(t) = (a \cos t, b \sin t), t \in [0, \pi]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$,
- 3) $F(t) = (\operatorname{sgn} t, \operatorname{sgn} t), t \in \mathbb{R}$.

LÖSUNG:

a) 1)



Die Folge (a_n) ist nicht beschränkt, denn es gilt

$$\|a_n\| = \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} \geq \sqrt{n^2} = n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Folgen (b_n) , (c_n) und (d_n) sind beschränkt, denn

$$\|b_n\| = \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{n^2}{(1+n)^2}} \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\|c_n\| = \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{\sqrt{2}}{n^2} \leq \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\|d_n\| = \sqrt{\cos^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)} = \sqrt{1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2) (a_n) ist nicht beschränkt, also auch nicht konvergent.

(b_n) konvergiert gegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c_n) konvergiert gegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Nullfolge).

(d_n) konvergiert nicht. Begründung: Eine Teilfolge der ersten Komponente: $(d_1^{(4n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ist $-1, 1, -1, 1, \dots$. Diese ist bekanntermaßen nicht konvergent. Also kann auch $(d_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ und damit auch $(d^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent sein.

- b) 1) Durch $F(t)$ ist ein Geradenstück mit Endpunkten A und B gegeben. Diese Funktion ist stetig, da F_1 und F_2 für alle $t \in [0, 1]$ stetig sind.
- 2) Durch $F(t)$ ist der obere Ast der Ellipse mit Halbachsen a und b beschrieben. Stetigkeit dieser Funktion folgt aus demselben Argument, wie in 1).
- 3) Die zur $F(t)$ gehörende Punktmenge in \mathbb{R}^2 sind 9 Punkte $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x, y \in \{-1, 0, 1\}\}$. Diese Funktion ist nicht stetig, da keine von den Funktionen F_1, F_2 stetig ist.

Hausübungen

(H 35) (Funktionengrenzwert)

(4+2+3P)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

gegeben.

- Zeige, dass für $\alpha \leq 0$ keine Funktionsgrenzwert für $x \rightarrow 0$ existiert.
- Zeige, dass für $\alpha > 0$ ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig.
- Für welche α existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$? Bestimme für diese α den Grenzwert.

LÖSUNG:

- Wenn $\alpha \leq 0$ ist, setzen wir $x_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$ und bekommen

$$\begin{aligned} x_n^\alpha \sin \frac{1}{x_n} &= \left(\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \right)^\alpha \sin \frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}} \\ &= \left(\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \right)^\alpha (-1)^n = \left((2n+1)\frac{\pi}{2} \right)^{-\alpha} (-1)^n. \end{aligned}$$

Diese Folge divergiert, da $-\alpha \geq 0$ ist.

- Wenn $\alpha > 0$ ist, dann ist $|x^\alpha \sin(\frac{1}{x})| \leq |x^\alpha| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

D.h. für alle $\alpha > 0$ ist der Grenzwert immer 0.

- Es gilt

$$\frac{1}{x}(f(x) - f(0)) = \frac{1}{x}(x^\alpha \sin \frac{1}{x} - 0) = x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}.$$

Diese Funktion konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist (nach a) und b)), und der Grenzwert ist gleich 0.

(H 36) (Fehlerabschätzung)

(5P)

In einer Messung wurden die Größen a, b und c zu $a = 2$, $b = 4$ und $c = 3$ bestimmt; dabei liegt der maximal mögliche (absolute) Fehler von a bei ± 0.5 , von b bei ± 0.2 und von c bei $-0.5, +0.2$. Die Werte werden in die Funktion

$$f(a, b, c) = \frac{a^2 + 1}{b^2 + 3} \sqrt{\frac{2}{c} + 4}$$

eingesetzt. Bestimme den Wert sowie die Fehlerschranken von $f(a, b, c)$.

Hinweis: Zerlege die Funktion in einer Verkettung von Teilfunktionen und nutze zur Bestimmung der Fehlerschranken die Monotonie dieser Teilfunktionen.

LÖSUNG:

Die Funktion f ist aus Funktionen zusammengesetzt, die in der Nähe der Messwerte streng monoton sind; wir nutzen diese Monotonie im folgenden zur Berechnung des maximalen Fehlers aus.

Wir betrachten zunächst $a^2 + 1$. Die Teilfunktion ist in der Nähe von $a = 2$ streng monoton wachsend, also ergibt sich als kleinster Wert $1.5^2 + 1 = 3.25$, als grösster Wert $2.5^2 + 1 = 7.25$. Für $b^2 + 3$ gilt eine ähnliche Argumentation: Der kleinste Wert ist $3.8^2 + 3 = 17.44$, der grösste $4.2^2 + 3 = 20.64$. Bei $\frac{2}{c} + 4$ hat man streng monoton fallendes Verhalten, also liegt der kleinste Wert bei $\frac{2}{3.2} + 4 = 4.625$, der grösste bei $\frac{2}{2.5} + 4 = 4.8$. Da die Funktion der Kehrwertbildung zwischen 17.44 und 20.64 streng monoton fallend ist, hat man den kleinsten Wert von $\frac{1}{b^2+3}$ bei $\frac{1}{2.64}$, den grössten bei $\frac{1}{17.44}$. Die Wurzelfunktion ist streng monoton steigend, also liegt der kleinste Wert von $\sqrt{\frac{2}{c} + 4}$ bei $\sqrt{4.265}$, der grösste bei $\sqrt{4.8}$. Da ein Produkt $x \cdot y \cdot z$ aus positiven Zahlen maximal ist, wenn alle Zahlen maximal sind, und minimal, wenn alle Zahlen minimal sind, liegt der Minimalwert von $f(a, b, c)$ bei $\frac{3.25}{20.64} \sqrt{4.625} \approx 0.338633202$, der Maximalwert bei $\frac{7.25}{17.44} \sqrt{4.8} \approx 0.910777189$. Wenn man a, b, c wie gemessen einsetzt, ergibt sich $\frac{5}{19} \sqrt{\frac{14}{3}} \approx 0.568486026$.

(H 37) (Grenzwert einer Funktion)

(3+3P)

Gegeben seien die Funktionen $f_1 = \frac{|x+1|+x+1}{|x^2-1|}$ und $f_2(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - x - 2$ mit $D(f_1) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ und $D(f_2) = \mathbb{R}$. Untersuche, ob die folgenden Funktionsgrenzwerte (eigentliche oder uneigentliche) existieren und berechne diese im Falle der Existenz.

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)$, $x_0 \in \{-1, 1, -\infty, +\infty\}$.

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$, $x_0 \in \{-2, -\infty, +\infty\}$.

LÖSUNG:

a) Es gilt

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & x > -1 \\ -x - 1, & x \leq -1. \end{cases}$$

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & |x| \geq 1 \\ -x^2 + 1, & |x| < 1. \end{cases}$$

Dann ist

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -\frac{2}{x-1}, & |x| < 1 \\ \frac{2}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f_1(x) = 1.$$

Daher existiert $\lim_{x \rightarrow -1} f_1(x)$ nicht. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f_1(x) = +\infty.$$

Daraus folgt, dass $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = +\infty$ als uneigentliche Grenzwert existiert. Die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ existieren und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0.$$

b) Es gilt

$$f_2(x) = |x + 2| - x - 2 = \begin{cases} 0, & x \geq -2 \\ -2x - 4, & x < -2. \end{cases}$$

Die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f_2(x) = 0,$$

woraus folgt, dass $\lim_{x \rightarrow -2} f_2(x)$ existiert und gleich 0 ist. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = +\infty.$$