Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 03.12.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

8. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 31) (Folgen)

Untersuchen Sie unterstehende Folgen auf Konvergenz oder Divergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls die jeweiligen Grenzwerte.

a)

$$a_k = \sqrt{k^2+k} - \sqrt{k^2-k},$$

b)

$$b_k = \frac{3k^3 - k^2 + 4k}{k^2 + 2 - k^3},$$

c)

$$c_k = (1 + \frac{1}{k})^{5k}.$$

Lösung:

a)

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{(\sqrt{k^2+k} - \sqrt{k^2-k})(\sqrt{k^2+k} + \sqrt{k^2-k})}{(\sqrt{k^2+k} + \sqrt{k^2-k})} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2k}{k(\sqrt{1+1/k} + \sqrt{1-1/k})} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+1/k} + \sqrt{1-1/k}} = 1,$$

b)

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{3k^3 - k^2 + 4k}{k^2 + 2 - k^3} = \lim_{k\to\infty} \frac{3 - 1/k + 4/k^2}{1/k + 2/k^2 - 1} = -3.$$

c)

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} (1 + \frac{1}{k})^{5k} = e^5.$$

(G 32) (Rekursiv definierte Folgen)

Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}a_n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $1 \leq a_n \leq \sqrt{2}$.

b) Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.

LÖSUNG:

a) Da ein Quadrat immer positiv ist, folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}a_n^2} \geq \sqrt{1+0} = 1$$

und mit $a_1 = 1 \geq 1$ der erste Teil der Behauptung. Der zweite Teil wird mit vollständiger Induktion bewiesen. Als Induktionsanfang gilt $a_1 = 1 \leq \sqrt{2}$. Für den Induktionsschritt von n nach $n+1$ wird als Induktionsvoraussetzung $a_n \leq \sqrt{2}$ angenommen. Zu zeigen ist die Behauptung $a_{n+1} \leq \sqrt{2}$. Mit der Annahme folgt $a_n^2 \leq 2$ oder $a_n^2/2 \leq 1$, dann ergibt sich

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}a_n^2} \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Die Folge ist also beschränkt.

b) Nach Teil a) gilt $1 \geq a_n^2/2$. Wegen

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}a_n^2} \geq \sqrt{\frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2}a_n^2} = \sqrt{a_n^2} = a_n$$

ist die beschränkte Folge $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, monoton wachsend und nach Korollar 12.8 auch konvergent mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Limesbildung der quadrierten Rekursionsformel

$$a_{n+1}^2 = 1 + \frac{1}{2}a_n^2$$

liefert

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 &= 1 + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_n^2, \\
a^2 &= 1 + \frac{a^2}{2}, \\
\frac{a^2}{2} &= 1,
\end{aligned}$$

und damit $a = \sqrt{2}$, da $1 \leq a_n \leq \sqrt{2}$.

(G 33) (Eigenschaften stetiger Funktionen)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Es existiert eine auf $[a, b]$ stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [a, b]$ und $B(f) = (-\infty, \infty)$.

b) Es existiert eine auf $[a, b]$ stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [a, b]$ und $B(f) = (c, d)$.

c) Es existiert eine auf $[a, b]$ stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [a, b]$ und $B(f) = [0, 1] \cup [3, 4]$.

LÖSUNG:

a) Falsch. Aus dem Satz 13.6 folgt, dass jede auf $[a, b]$ stetige Funktion beschränkt ist.

b) Falsch. Aus dem Satz 13.6 folgt, dass jede auf [a,b] stetige Funktion ihre Maximum und Minimum erreicht.

c) Falsch. Aus dem Zwischenwertsatz 13.3 folgt, dass die Funktion $f(x)$ alle Werte zwischen 0 und 4 annehmen muss.

Hausübungen

(H 32) (Folgen)

(4+2+2P)

Untersuchen Sie unterstehende Folgen auf Konvergenz oder Divergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls die jeweiligen Grenzwerte.

a)

$$a_k = (1 - \frac{1}{k^2})^k,$$

Hinweis: Bestimmen Sie $\lim_{k\to\infty}(1-\frac{1}{k})^k$, indem Sie die Funktion $(1-\frac{1}{k})^k$ umformen und die Formel $\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k})^k = e$ verwenden.

b)

$$b_k = \frac{2^k + 3 \cdot 4^k}{3^k + 4^k},$$

c)

$$c_k = \sqrt{4k^2 + 5k + 2} - 2k.$$

Lösung:

a) Es gilt

$$(1 - \frac{1}{k})^k = (\frac{1}{1 + \frac{1}{k-1}})^k = (\frac{1}{1 + \frac{1}{k-1}})^{k-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{k-1}}.$$

Dann ist $\lim_{k\to\infty}(1-\frac{1}{k})^k = e^{-1}$. Es gilt

$$\lim_{k\to\infty}(1 - \frac{1}{k^2})^k = \lim_{k\to\infty}(1 - \frac{1}{k})^k(1 + \frac{1}{k})^k = \lim_{k\to\infty}(1 - \frac{1}{k})^k \lim_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{k})^k = e^{-1}e = 1.$$

b)

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k + 3 \cdot 4^k}{3^k + 4^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2/4)^k + 3}{(3/4)^k + 1} = 3,$$

da eine Folge a^k, $0 \le a < 1$ nach Satz 12.6 gegen 0 konvergiert.

c) Erweiterung mit $\sqrt{4k^2 + 5k + 2} + 2k$ führt auf

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} c_k &= \lim_{k\to\infty}(\sqrt{4k^2 + 5k + 2} - 2k) \cdot \frac{\sqrt{4k^2 + 5k + 2} + 2k}{\sqrt{4k^2 + 5k + 2} + 2k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(4k^2 + 5k + 2) - 4k^2}{\sqrt{4k^2 + 5k + 2} + 2k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{5k + 2}{\sqrt{4k^2 + 5k + 2} + 2k} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{5 + \frac{2}{k}}{\sqrt{4 + \frac{5}{k} + \frac{2}{k^2}} + 2} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{5}{\sqrt{4} + 2} \\
&= \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

(H 33) (Zwischenwertsatz)

(5P)

Zeigen Sie, dass es für jede stetige Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\phi(x) = f(x) - x$.

LÖSUNG:

Es gilt $\phi(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$. Auf andere Seite ist $\phi(1) = f(1) - 1 \leq 0$, weil $f(x) \leq 1$ ist. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es ein x_0 gibt, so dass $\phi(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$ ist.

(H 34) (Stetigkeit von Funktionen)

(3+4P)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig sind. Überprüfen Sie jeweils, ob die Funktionen stetig auf ganz $\mathbb{R}$ bzw. auf $[-1, 1]$ fortsetzbar sind.

a)

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 + x^2 - x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\},$$

b)

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - \cos(x)}}, \quad x \in [-1, 1] \setminus \{0\}.$$

LÖSUNG:

a) Die Funktion $f(x)$ ist in $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ stetig, da für alle $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$ ist. Es gilt $f(x) = \frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3+x^2-x-1} = \frac{(x+1)^2(x+2)}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$

Die Funktion $f(x)$ hat eine hebbare Lücke bei $f(-1) = -\frac{1}{2}$. Sie lässt sich nicht auf $\mathbb{R}$ fortsetzen, da $f(x)$ für $x = 1$ nicht hebbar ist.

b) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}, \quad x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$

Der Zähler $\sin(x)$ ist eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion. Da $1 - \cos(x)$ auch auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist und den Wertebereich $[0, 1]$ besitzt, bildet die Verkettung mit der auf $[0, \infty)$ stetigen Funktion $\sqrt{x}$ ebenfalls eine stetige Funktion. Die Funktion f ist damit bis auf die Stelle $x = 0$, an der der Nenner eine Nullstelle besitzt, stetig.

Für eine Untersuchung der stetigen Fortsetzbarkeit wird die Darstellung

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - \cos(x)}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \cos(x)}}{\sqrt{1 + \cos(x)}} = \frac{\sin(x) \cdot \sqrt{1 + \cos(x)}}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}}$$

benutzt. Mit $\sqrt{1 - \cos^2(x)} = |\sin(x)|$ und der Vorzeichen-Funktion $sign(x)$ kann diese vereinfacht werden zu

$$f(x) = sign(\sin(x)) \cdot \sqrt{1 + \cos(x)}.$$

Für jede Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $0 < x_n \leq 1$ ist $sign(x_n) = 1$, während für jede Nullfolge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $0 > y_n \geq -1$ stets $sign(y_n) = -1$ ist.

Mit $\sqrt{1 + \cos(0)} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ besitzen die Folgen verschiedene Grenzwerte, so daß f an der Stelle $x = 0$ nicht stetig fortgesetzt werden kann.