Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 19.11.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

6. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 24)

Wir betrachten die durch drei Punkte $P_1(-1,0,1)$, $P_2(0,2,0)$ und $P_3(-3,-1,0)$ definierte Ebene E und eine Gerade

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} .$$

a) Bestimmen Sie die Normalenform von E!

b) Zeigen Sie, dass g parallel zu E verläuft.

c) Berechnen Sie die Projektion von $(-4,3,2)$ auf E.

LÖSUNG:

Gegeben sind die Punkte $P_1(-1,0,-1)$, $P_2(0,2,0)$ und $P_3(-3,-1,0)$. Es sei E die Ebene durch die obigen Punkte. Die Gerade g besitzt die Parameterdarstellung

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Die Parameterdarstellung von E lautet:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0+1 \\ 2-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3+1 \\ -1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt nun, einen Vektor $\vec{N}$ zu bestimmen, der senkrecht auf E steht:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \vec{N} \rangle = 0, \text{ und } \langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \vec{N} \rangle = 0.$$

Man erhält somit ein (unterbestimmtes) homogenes LGS, aus dem man die Komponenten n_1, n_2 und n_3 von $\vec{N}$ bestimmen kann.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \vec{N} = s \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ mit } s \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen zunächst $s = 1$ und normalisieren dann $\vec{N}$:

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{N}\|}\vec{N} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\left\langle \vec{n} \mid (0,2,0)^T \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}$ lautet die Hesse Normalenform von E

$$E : \langle \vec{n} \mid x \rangle - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0.$$

b) Die Gerade und die Ebene sind parallel, da der Richtungsvektor der Geraden g und der Normalenvektor der Ebene E orthogonal sind, denn

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

c) Gesucht ist die Projektion von g auf E. Wir bestimmen also den Durchstoßpunkt einer zu E orthogonalen Geraden durch E, die durch den Punkt $(-4, 3, 2)$ verläuft. Dadurch erhalten wir das lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} & -3\nu - \lambda + 2\mu = 3 \\ \Rightarrow\ & 3\nu - 2\lambda + \mu = -3 \\ & 3\nu + \lambda + \mu = -1 \end{aligned}$$

Hieraus die zum Durchstoßpunkt gehörigen Parameterwerte:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \mu = \frac{2}{3},\ \lambda = \frac{2}{3},\ \nu = -\frac{7}{9}.$$

Der Durchstoßpunkt hat also die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{7}{9}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Die Projektion $\tilde{g}$ von g auf E hat die Gestalt:

$$\tilde{g} : \vec{r} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(G 25) Komplexe Zahlen

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, sowie Betrag, Argument und Polarkoordinatendarstellung der folgenden komplexen Zahlen mit $z_1 = 2 + \jmath$, $z_2 = 4 - 3\jmath$.

a) $z_3 = z_1^* z_2$

b) $z_4 = \dfrac{z_1}{z_2^*}$

LÖSUNG:

a) Es ist $z_3 = z_1{}^* z_2 = (2 - \jmath)(4 - 3\jmath) = 5 - 10\jmath = 5(1 - 2\jmath)$, Realteil 5, Imaginärteil -10. $|z_3| = 5|1 - 2\jmath| = 5\sqrt{5}$, $\arg z_3 = \arctan(-2) = -1,1071$. Somit $z_3 \approx 11,1803 e^{-6,9564\jmath}$ als Polarkoordinatendarstellung.

b) $z_4 = \frac{z_1}{z_2^*} = \frac{(2+\jmath)(4-3\jmath)}{25} = \frac{11-2\jmath}{25}$, Realteil $\frac{11}{25}$ und $\frac{-2}{25}$ als Imaginärteil. $|z_4| = \frac{1}{25}\sqrt{125} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\arg z_4 = \arctan\frac{-2}{11} = -0,1799$. Die Polarkoordinatendarstellung ist $z_4 \approx 0,4472 e^{-1,1301\jmath}$.

(G 26) Komplexe Zahlen

a) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von $-7\jmath$, $(1-\jmath)^{100}$ und berechnen Sie alle Lösungen der Gleichungen

$$z^4 = -7\jmath, \quad z^{100} = (1-\jmath)^{100}.$$

b) Berechnen Sie für $z_1 = 2 - 3\jmath$, $z_2 = -1 + 5\jmath$ und $z_3 = \cos\phi + \jmath\sin\phi$, $\phi \in \mathbb{R}$ beliebig, den Ausdruck

$$\frac{z_1}{z_2^*} z_3^3.$$

c) Skizzieren Sie den Bereich der komplexen Zahlenebene, der durch folgende Ungleichung beschrieben wird:

$$|z + 3 - \jmath| < 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

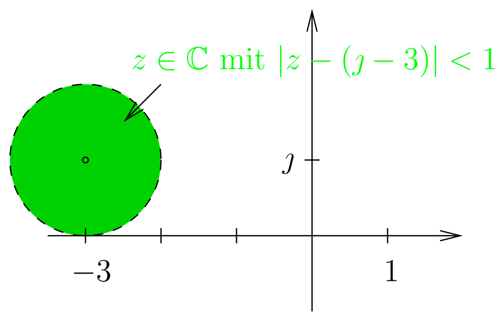
LÖSUNG:

a) Es gilt $-7\jmath = 7e^{-\frac{2\pi\jmath}{4}}$, wegen $(1-\jmath) = 2^{\frac{1}{2}} e^{2\pi\jmath\frac{-1}{8}}$ ist $(1-\jmath)^{100} = 2^{50} e^{2\pi\jmath\frac{-1}{2}} = -2^{50}$. Mit $\xi_n = e^{\frac{2\pi\jmath}{n}}$ gilt

$$\begin{aligned} z^4 = 7e^{-\frac{2\pi\jmath}{4}} &\Leftrightarrow z \in \sqrt[4]{7}\{e^{-\frac{\pi\jmath}{8}}, e^{\frac{3\pi\jmath}{8}}, e^{\frac{7\pi\jmath}{8}}, e^{\frac{11\pi\jmath}{8}}\}, \\ z^{100} = (1-\jmath)^{100} &\Leftrightarrow z \in \{(1-\jmath)\xi_{100}^k : \quad k \in \{0,\dots,99\}\}, \\ &\Leftrightarrow z \in \{\sqrt{2} e^{\pi\jmath\frac{2k-25}{100}} : \quad k \in \{0,\dots,99\}\}. \end{aligned}$$

b) Es ist $\frac{z_1}{z_2^*} = \frac{13+13\jmath}{26} = \frac{e^{\frac{\pi\jmath}{4}}}{\sqrt{2}}$, daher $\frac{z_1}{z_2^*} z_3^3 = \frac{e^{(\frac{\pi}{4}+3\phi)\jmath}}{\sqrt{2}}$.

c) Siehe folgende Zeichnung:



(G 27)

a) Welche komplexe Zahl z erfüllt die Gleichung

$$\jmath(z-5) = 17 - 3\jmath \qquad ?$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 = a$$

für $a = -1-\jmath$. Berechnen Sie - mit ausführlichem Rechenweg - die Polardarstellung von a.
Berechnen Sie a^{20} und geben Sie die Lösung auch in der Form $x + \jmath y$ mit $x,\, y \in \mathbb{R}$ an.
Wie groß ist $|a^{20}|$?

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} & \jmath(z-5) = 17 - 3\jmath & \\ \Leftrightarrow\quad & \jmath z - 5\jmath = 17 - 3\jmath & \quad | + 5\jmath \\ \Leftrightarrow\quad & \jmath z = 17 + 2\jmath & \quad | \cdot \jmath \\ \Leftrightarrow\quad & -z = 17\jmath - 2 & \quad | \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow\quad & z = 2 - 17\jmath. & \end{aligned}$$

b) Zunächst bringen wir $a = -1 - \jmath$ in Polardarstellung. Es gilt

$$|a| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Wegen $\texttt{Re}(a) = -1$, $\texttt{Im}(a) = -1$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$ gilt

$$\begin{aligned} \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad & \text{mit den Lösungen } \varphi = \frac{5\pi}{4} \qquad \text{oder } \varphi = \frac{7\pi}{4} \\ \cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad & \text{mit den Lösungen } \varphi = \frac{3\pi}{4} \qquad \text{oder } \varphi = \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

Der Winkel $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ taucht in beiden Fällen als Lösung auf. Daher lautet die Polardarstellung von a:

$$a = \sqrt{2}(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \jmath \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)) = \sqrt{2}\exp\left(\jmath \cdot \frac{5}{4}\pi\right).$$

Als Lösungen der Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{2}\exp\left(\jmath\frac{\varphi + 0\cdot 2\pi}{2}\right) = \sqrt{|a|}\exp\left(\jmath \cdot \frac{\varphi}{n}\right) &&= \sqrt[4]{2}\exp\left(\jmath \cdot \frac{5\pi}{8}\right) \\ z_1 &= \sqrt[4]{2}\exp\left(\jmath\frac{\varphi + 1\cdot 2\pi}{2}\right) = \sqrt{|a|}\exp\left(\jmath \cdot \frac{\varphi + 2\pi}{n}\right) &&= \sqrt[4]{2}\exp\left(\jmath \cdot \frac{13\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

Zur Berechnung von a^{20} wählen wir die Polardarstellung von a:

$$
\begin{aligned}
a^{20} &= \left(\sqrt{2}\exp\left(\jmath\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{20} \\
&= (\sqrt{2})^{20}\left(\exp\left(\jmath\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{20} = 2^{10}\exp\left(\jmath 25\pi\right) = 2^{10}\exp\left(\jmath\pi\right) = -2^{10}.
\end{aligned}
$$

Wie leicht zu sehen ist, gilt $|a| = |-2^{10}| = 2^{10}$.

Hausübungen

(H 25) (5 Punkte)

Wir betrachten die beiden Geraden

$$g_1 \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \;\; \lambda \in \mathbb{R},$$

$$g_2 \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \;\; \mu \in \mathbb{R}.$$

a) Die Geraden schneiden sich. Berechnen Sie den Schnittpunkt!
Wie groß ist der Schnittwinkel der Geraden?

b) Geben Sie die Normalendarstellung der Ebene an, die durch $(0, 8, 15)$ und die beiden Richtungsvektoren von g_1 und g_2 gegeben ist!

LÖSUNG:

Gegeben sind die Geraden

$$g_1 \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \;\; \lambda \in \mathbb{R},$$

$$g_2 \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \;\; \mu \in \mathbb{R}.$$

a) Setzen wir g_1 und g_2 gleich, so erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & a\lambda && = -4 \\ \Leftrightarrow \quad & -8\lambda + \mu && = 8 \\ & \lambda - \mu && = -1 \\ \Rightarrow \quad & \lambda = -1 \quad \text{und} \quad \mu = 0 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden berechnet sich somit als

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Geraden schneiden sich unter einem Winkel von

$$\alpha = \arccos \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \;\; (45^\circ) \,.$$

b) Die gesuchte Ebene besitzt die Parameterdarstellung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Über

$$\left(\begin{array}{cc|c|ccc} 1 & -8 & & 4 & -8 & 1 \\ 0 & -1 & & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c|ccc} 1/4 & 0 & & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7/4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

bestimmt sich ein Normalenvektor

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Für die Normalenform gilt also:

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad - \frac{92}{9} = 0.$$

(H 26) (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungen $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} (1+\jmath)z_1 + (1-\jmath)z_2 &= 3+\jmath \\ (1-\jmath)z_1 + 3\jmath z_2 &= -3-2\jmath \end{aligned}$$

Lösung:

Wir wenden das gewohnte Verfahren zur Lösung des inhomogenen LGS an. Man zieht die erste Zeile, multipliziert mit $\frac{1-\jmath}{1+\jmath}$, von der zweiten ab:

$$\left(\begin{array}{cc|c} (1+\jmath) & (1-\jmath) & 3+\jmath \\ (1-\jmath) & 3\jmath & -3-2\jmath \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} (1+\jmath) & (1-\jmath) & 3+\jmath \\ 0 & 1+4\jmath & -4+\jmath \end{array}\right).$$

Hierzu sind einige Nebenrechnungen nötig:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\jmath} &= \frac{1-\jmath}{1^2+1^2} = \frac{1-\jmath}{2}, \\ \frac{1-\jmath}{1+\jmath} &= \frac{(1-\jmath)^2}{2} = \frac{1-2\jmath-1}{2} = -\jmath, \\ 3\jmath - (1-\jmath)\frac{1-\jmath}{1+\jmath} &= 3\jmath + \jmath(1-\jmath) = 4\jmath + 1, \\ -3-2\jmath-(3+\jmath)\frac{1-\jmath}{1+\jmath} &= -3-2\jmath+\jmath(3+\jmath) = -4+\jmath. \end{aligned}$$

Man liest nun ab:

$$z_2(1+4\jmath) = (-4+\jmath) = (4\jmath+1)\jmath, \quad \text{also } z_2 = \jmath,$$

$$z_1 = \frac{1}{1+\jmath}(3+\jmath-(1-\jmath)\jmath) = \frac{1}{1+\jmath}(3+\jmath-\jmath+\jmath^2) = \frac{1-\jmath}{2}(2+0) = 1-\jmath.$$

(H 27) (6 Punkte) Dreiecksungleichung im Komplexen

a) Zeigen Sie: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathtt{Re}z \le |z|$. Wann gilt Gleichheit?

b) Zeigen Sie die Dreicksungleichung für komplexe Zahlen:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \quad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

c) Beweisen Sie: $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Hinweis: Quadrieren Sie in a) und b) jeweils beide Seiten der Ungleichung. (Warum genügt es, die quadrierten Ungleichungen zu betrachten?)

LÖSUNG:

a) Da $\mathtt{Re}z$ eine reelle Zahl ist, gilt zunächst $\mathtt{Re}z \leq |\mathtt{Re}(z)|$. Weiter gilt

$$|\mathtt{Re}(z)|^2 = \mathtt{Re}(z)^2 \leq \mathtt{Re}(z)^2 + \mathtt{Im}(z)^2 = |z|^2.$$

hieraus ergibt sich $\mathtt{Re}(z) \leq |z|$, wie behauptet.

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\mathtt{Re}(z) = |\mathtt{Re}(z)|$ und $\mathtt{Im}(z) = 0$, also wenn z eine nicht negative reelle Zahl ist.

b) Wir zeigen $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$. (Da $|z|$ für jede komplexe Zahl reell und ≥ 0 ist, folgt daraus auch die behauptete Ungleichung.)

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* = (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) \\
&= z_1 z_1^* + z_2 z_1^* + z_1 z_2^* + z_2 z_2^* \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 z_2^* + (z_1 z_2^*)^* \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathtt{Re}(z_1 z_2^*) \\
&\leq^{a)} |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2| \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 .
\end{aligned}$$

c) Hier kann man genauso vorgehen wie bei dem Beweis der entsprechenden Ungleichung im Reellen:

$$|z_1 - z_2| + |z_2| \geq^{b)} |z_1 - z_2 + z_2| = |z_1|,$$

also $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

(H 28) (5 Punkte) Komplexe Zahlen

a) Bestimmen Sie die Lösung $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichung

$$(3 + \jmath)z - \frac{1}{\jmath} = 2 + 3\jmath.$$

b) Berechnen Sie $z = (1 + \jmath)^{20}$.

c) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -1$.

LÖSUNG:

a) Es ist $(3 + \jmath)z - \frac{1}{\jmath} = 2 + 3\jmath$ also $z = 2\frac{1+\jmath}{3+\jmath} = \frac{1}{5}(1 + \jmath)(3 - \jmath) = \frac{2}{5}(2 + \jmath)$.

b) $\omega = 1 + \jmath = \sqrt{2}e^{2\pi\jmath\phi}$, $\phi = \frac{1}{4}$ und $20\phi = 5 \equiv 0 \mod 1$, also $z = 2^{\frac{20}{2}} = 1024$.

c) $z^4 = -1 = e^{\frac{1}{2}2\pi\jmath}$, mit $\xi_4 = e^{\frac{2\pi\jmath}{4}} = \jmath$ folgt

$$z^4 = -1 \Leftrightarrow z \in \left\{ \frac{1 + \jmath}{\sqrt{2}} \xi_4^k : \quad k \in \{0, \dots, 3\} \right\} = \left\{ \pm\frac{1 + \jmath}{\sqrt{2}}, \pm\frac{-1 + \jmath}{\sqrt{2}} \right\}.$$