Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 19.11.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

6. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 24)

Wir betrachten die durch drei Punkte $P_1(-1,0,1)$, $P_2(0,2,0)$ und $P_3(-3,-1,0)$ definierte Ebene E und eine Gerade

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} .$$

a) Bestimmen Sie die Normalenform von E!

b) Zeigen Sie, dass g parallel zu E verläuft.

c) Berechnen Sie die Projektion von $(-4,3,2)$ auf E.

LÖSUNG:

Gegeben sind die Punkte $P_1(-1,0,-1)$, $P_2(0,2,0)$ und $P_3(-3,-1,0)$. Es sei E die Ebene durch die obigen Punkte. Die Gerade g besitzt die Parameterdarstellung

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Die Parameterdarstellung von E lautet:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0+1 \\ 2-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3+1 \\ -1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt nun, einen Vektor $\vec{N}$ zu bestimmen, der senkrecht auf E steht:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \vec{N} \right\rangle = 0, \text{ und } \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \vec{N} \right\rangle = 0.$$

Man erhält somit ein (unterbestimmtes) homogenes LGS, aus dem man die Komponenten n_1, n_2 und n_3 von $\vec{N}$ bestimmen kann.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \vec{N} = s \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ mit } s \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen zunächst $s = 1$ und normalisieren dann $\vec{N}$:

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{N}\|}\vec{N} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\left\langle \vec{n} \mid (0,2,0)^T \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}$ lautet die Hesse Normalenform von E

$$E : \langle \vec{n} \mid x \rangle - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0.$$

b) Die Gerade und die Ebene sind parallel, da der Richtungsvektor der Geraden g und der Normalenvektor der Ebene E orthogonal sind, denn

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

c) Gesucht ist die Projektion von g auf E. Wir bestimmen also den Durchstoßpunkt einer zu E orthogonalen Geraden durch E, die durch den Punkt $(-4, 3, 2)$ verläuft. Dadurch erhalten wir das lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} & -3\nu - \lambda + 2\mu = 3 \\ \Rightarrow\ & 3\nu - 2\lambda + \mu = -3 \\ & 3\nu + \lambda + \mu = -1 \end{aligned}$$

Hieraus die zum Durchstoßpunkt gehörigen Parameterwerte:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \mu = \frac{2}{3}, \lambda = \frac{2}{3}, \nu = -\frac{7}{9}.$$

Der Durchstoßpunkt hat also die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{7}{9}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Die Projektion $\tilde{g}$ von g auf E hat die Gestalt:

$$\tilde{g} : \vec{r} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(G 25) Komplexe Zahlen

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, sowie Betrag, Argument und Polarkoordinatendarstellung der folgenden komplexen Zahlen mit $z_1 = 2 + \jmath$, $z_2 = 4 - 3\jmath$.

a) $z_3 = z_1^* z_2$

b) $z_4 = \dfrac{z_1}{z_2^*}$

LÖSUNG:

a) Es ist $z_3 = z_1{}^* z_2 = (2-\jmath)(4-3\jmath) = 5 - 10\jmath = 5(1-2\jmath)$, Realteil 5, Imaginärteil -10. $|z_3| = 5|1-2\jmath| = 5\sqrt{5}$, $\arg z_3 = \arctan(-2) = -1,1071$. Somit $z_3 \approx 11,1803 e^{-6,9564\jmath}$ als Polarkoordinatendarstellung.

b) $z_4 = \frac{z_1}{z_2^*} = \frac{(2+\jmath)(4-3\jmath)}{25} = \frac{11-2\jmath}{25}$, Realteil $\frac{11}{25}$ und $\frac{-2}{25}$ als Imaginärteil. $|z_4| = \frac{1}{25}\sqrt{125} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\arg z_4 = \arctan\frac{-2}{11} = -0,1799$. Die Polarkoordinatendarstellung ist $z_4 \approx 0,4472 e^{-1,1301\jmath}$.

(G 26) Komplexe Zahlen

a) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von $-7\jmath$, $(1-\jmath)^{100}$ und berechnen Sie alle Lösungen der Gleichungen

$$z^4 = -7\jmath, \quad z^{100} = (1-\jmath)^{100}.$$

b) Berechnen Sie für $z_1 = 2 - 3\jmath$, $z_2 = -1 + 5\jmath$ und $z_3 = \cos\phi + \jmath\sin\phi$, $\phi \in \mathbb{R}$ beliebig, den Ausdruck

$$\frac{z_1}{z_2^*} z_3^3.$$

c) Skizzieren Sie den Bereich der komplexen Zahlenebene, der durch folgende Ungleichung beschrieben wird:

$$|z + 3 - \jmath| < 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

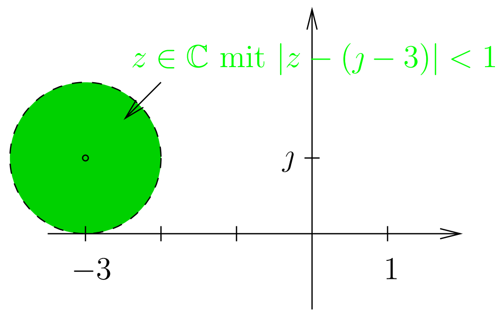
LÖSUNG:

a) Es gilt $-7\jmath = 7e^{-\frac{2\pi\jmath}{4}}$, wegen $(1-\jmath) = 2^{\frac{1}{2}} e^{2\pi\jmath\frac{-1}{8}}$ ist $(1-\jmath)^{100} = 2^{50} e^{2\pi\jmath\frac{-1}{2}} = -2^{50}$. Mit $\xi_n = e^{\frac{2\pi\jmath}{n}}$ gilt

$$\begin{aligned} z^4 = 7e^{-\frac{2\pi\jmath}{4}} &\Leftrightarrow z \in \sqrt[4]{7}\{e^{-\frac{\pi\jmath}{8}}, e^{\frac{3\pi\jmath}{8}}, e^{\frac{7\pi\jmath}{8}}, e^{\frac{11\pi\jmath}{8}}\}, \\ z^{100} = (1-\jmath)^{100} &\Leftrightarrow z \in \{(1-\jmath)\xi_{100}^k : \quad k \in \{0,\dots,99\}\}, \\ &\Leftrightarrow z \in \{\sqrt{2} e^{\pi\jmath\frac{2k-25}{100}} : \quad k \in \{0,\dots,99\}\}. \end{aligned}$$

b) Es ist $\frac{z_1}{z_2^*} = \frac{13+13\jmath}{26} = \frac{e^{\frac{\pi\jmath}{4}}}{\sqrt{2}}$, daher $\frac{z_1}{z_2^*} z_3^3 = \frac{e^{(\frac{\pi}{4}+3\phi)\jmath}}{\sqrt{2}}$.

c) Siehe folgende Zeichnung:



(G 27)

a) Welche komplexe Zahl z erfüllt die Gleichung

$$\jmath(z-5) = 17 - 3\jmath \qquad ?$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 = a$$

für $a = -1 - \jmath$. Berechnen Sie - mit ausführlichem Rechenweg - die Polardarstellung von a.
Berechnen Sie a^{20} und geben Sie die Lösung auch in der Form $x + \jmath y$ mit $x,\, y \in \mathbb{R}$ an. Wie groß ist $|a^{20}|$?

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
& & \jmath(z-5) &= 17 - 3\jmath & \\
&\Leftrightarrow & \jmath z - 5\jmath &= 17 - 3\jmath & \quad | + 5\jmath \\
&\Leftrightarrow & \jmath z &= 17 + 2\jmath & \quad | \cdot \jmath \\
&\Leftrightarrow & -z &= 17\jmath - 2 & \quad | \cdot (-1) \\
&\Leftrightarrow & z &= 2 - 17\jmath. &
\end{aligned}$$

b) Zunächst bringen wir $a = -1 - \jmath$ in Polardarstellung. Es gilt

$$|a| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Wegen $\texttt{Re}(a) = -1$, $\texttt{Im}(a) = -1$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$ gilt

$$\begin{aligned}
\sin\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{mit den Lösungen } \varphi = \frac{5\pi}{4} \qquad \text{oder } \varphi = \frac{7\pi}{4} \\
\cos\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{mit den Lösungen } \varphi = \frac{3\pi}{4} \qquad \text{oder } \varphi = \frac{5\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Der Winkel $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ taucht in beiden Fällen als Lösung auf. Daher lautet die Polardarstellung von a:

$$a = \sqrt{2}(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \jmath \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)) = \sqrt{2}\exp\left(\jmath \cdot \frac{5}{4}\pi\right).$$

Als Lösungen der Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{2}\exp\left(\jmath \frac{\varphi + 0 \cdot 2\pi}{2}\right) = \sqrt{|a|}\exp\left(\jmath \cdot \frac{\varphi}{n}\right) &&= \sqrt[4]{2}\exp\left(\jmath \cdot \frac{5\pi}{8}\right) \\
z_1 &= \sqrt[4]{2}\exp\left(\jmath \frac{\varphi + 1 \cdot 2\pi}{2}\right) = \sqrt{|a|}\exp\left(\jmath \cdot \frac{\varphi + 2\pi}{n}\right) &&= \sqrt[4]{2}\exp\left(\jmath \cdot \frac{13\pi}{8}\right)
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von a^{20} wählen wir die Polardarstellung von a:

$$\begin{aligned} a^{20} &= \left(\sqrt{2}\exp\left(\jmath\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{20} \\ &= (\sqrt{2})^{20}\left(\exp\left(\jmath\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{20} = 2^{10}\exp\left(\jmath 25\pi\right) = 2^{10}\exp\left(\jmath\pi\right) = -2^{10}. \end{aligned}$$

Wie leicht zu sehen ist, gilt $|a| = |-2^{10}| = 2^{10}$.