



Mathematik I für ET, WI(ET), SpInf, iSt, BEEd.ET, CE

6. Übung

Gruppenübungen

(G 24)

Wir betrachten die durch drei Punkte $P_1(-1, 0, 1)$, $P_2(0, 2, 0)$ und $P_3(-3, -1, 0)$ definierte Ebene E und eine Gerade

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} .$$

- Bestimmen Sie die Normalenform von E !
- Zeigen Sie, dass g parallel zu E verläuft.
- Berechnen Sie die Projektion von $(-4, 3, 2)$ auf E .

(G 25) Komplexe Zahlen

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, sowie Betrag, Argument und Polarkoordinatendarstellung der folgenden komplexen Zahlen mit $z_1 = 2 + j$, $z_2 = 4 - 3j$.

- $z_3 = z_1^* z_2$
- $z_4 = \frac{z_1}{z_2^*}$

(G 26) Komplexe Zahlen

- Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von $-7j$, $(1-j)^{100}$ und berechnen Sie alle Lösungen der Gleichungen

$$z^4 = -7j, \quad z^{100} = (1-j)^{100}.$$

- Berechnen Sie für $z_1 = 2 - 3j$, $z_2 = -1 + 5j$ und $z_3 = \cos \phi + j \sin \phi$, $\phi \in \mathbb{R}$ beliebig, den Ausdruck

$$\frac{z_1}{z_2^*} z_3^3.$$

- Skizzieren Sie den Bereich der komplexen Zahlenebene, der durch folgende Ungleichung beschrieben wird:

$$|z + 3 - j| < 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(G 27)

a) Welche komplexe Zahl z erfüllt die Gleichung

$$j(z - 5) = 17 - 3j \quad ?$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 = a$$

für $a = -1 - j$. Berechnen Sie - mit ausführlichem Rechenweg - die Polardarstellung von a .

Berechnen Sie a^{20} und geben Sie die Lösung auch in der Form $x + jy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an. Wie groß ist $|a^{20}|$?

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1

Hausübungen

(H 25) (5 Punkte)

Wir betrachten die beiden Geraden

$$g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R},$$
$$g_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu \in \mathbb{R}.$$

- Die Geraden schneiden sich. Berechnen Sie den Schnittpunkt!
Wie groß ist der Schnittwinkel der Geraden?
- Geben Sie die Normalendarstellung der Ebene an, die durch $(0, 8, 15)$ und die beiden Richtungsvektoren von g_1 und g_2 gegeben ist!

(H 26) (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} (1 + j)z_1 + (1 - j)z_2 &= 3 + j \\ (1 - j)z_1 + 3jz_2 &= -3 - 2j \end{aligned}$$

(H 27) (6 Punkte) Dreiecksungleichung im Komplexen

- Zeigen Sie: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Re} z \leq |z|$. Wann gilt Gleichheit?
- Zeigen Sie die Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

- Beweisen Sie: $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Hinweis: Quadrieren Sie in a) und b) jeweils beide Seiten der Ungleichung. (Warum genügt es, die quadrierten Ungleichungen zu betrachten?)

(H 28) (5 Punkte) Komplexe Zahlen

- Bestimmen Sie die Lösung $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichung

$$(3 + j)z - \frac{1}{j} = 2 + 3j.$$

- Berechnen Sie $z = (1 + j)^{20}$.
- Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -1$.