Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 5.11.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

4. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 16) Lineare Algebra Test

a) Der Rang einer Matrix ist

☐	die Anzahl ihrer Spalten,
☐	die Anzahl der 0-Zeilen,
☑	$n-$(Anzahl der 0-Zeilen in der Zeilenstufenform) wenn die Matrix n Zeilen und Spalten hat,
☐	die Anzahl der Nicht-0-Zeilen,
☑	die Anzahl der linear unabhängigen Spalten

b) Sie haben ein unterbestimmtes LGS mit m Zeilen und n Spalten und ℓ als Dimension des Lösungsraums. Die Variablen seien in abhängige und unabhängige Variablen aufgeteilt. Dann ist

W	F	Aussage
☐	☑	Die Anzahl der freien Variablen gleich dem Rang
☑	☐	Die Anzahl der abhängigen Variablen gleich dem Rang
☐	☑	$m = \text{Rang} + \ell$
☑	☐	$n = \text{Rang} + \ell$

c) Für das LGS $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $M = [\mathbf{v_1} \cdots \mathbf{v_n}]$ gilt

☑	wenn $\mathbf{b}$ im Erzeugnis von $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}$ liegt, dann ist das LGS lösbar.
☑	wenn das LGS lösbar ist, dann muss $\mathbf{b}$ im Erzeugnis von $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}$ liegen.

d) Gegeben sei ein LGS, die Variablen seien wie in b) aufgeteilt. Der Lösungsraum L des LGS

☑	ist stets ein Untervektorraum wenn das LGS homogen ist.
☐	ist stets ein Untervektorraum wenn das LGS inhomogen ist.
☐	hat immer Dimension größer Null.
☑	hat Dimension $n-$(Rang des LGS) bei einem homogenen $m \times n$ LGS.
☐	hat negative Dimension wenn das LGS unterbestimmt ist.
☐	ist die Menge der unabhängigen Variablen.
☐	ist beim zugehörenden homogenen LGS stets größer als beim inhomogenen.
☑	hat eine der Anzahl unabhängiger Variablen entsprechende Dimension ...
☑	...und diese entspricht der Maximalzahl an linear unabhängiger Lösungen des homogenen Systems.
☑	kann durch ein Fundamentalsystem plus eine spezielle Lösung angegeben werden, wenn das LGS inhomogen ist.
☐	hat Dimension Null wenn keine Lösungen existieren.

(G 17)

Betrachten Sie folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ & & & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Auf wie viele Arten kann man die Menge der abhängigen Variablen im LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ auswählen?

b) Geben Sie jeweils zwei solche Auswahlen an!

Anleitung: Sortieren Sie die Spalten von A um, bis die Matrix in Zeilenstufenform vorliegt. Behalten Sie dabei im Blick, welche Spalte zu welcher Variable gehört.

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \hline 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ & & & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 7 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \hline 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ & & & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 7 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \dots$$

LÖSUNG:

a) Nachdem man alle Spalten wie angedeutet sortiert hat, erhält man folgendes Tablaux:

x_2	x_1	x_3	x_6	x_8	x_4	x_5	x_7
0	2	3	2	1	4	0	0
					5	6	0
							7

Man sieht nun besser, wie viele Möglichekiten man hat, drei linear unabhänige Spalten als Erzeugendensystem der Spalten von A zu wählen:

Die zu x_7 gehörige Spalte muss immer gewählt werden, weiter kann man eine der zu x_4 und x_5 gehörigen Spalten wählen. Dann hat man noch 5 nicht Null-Spalten, die zu den beiden gewählten linear unabhängig sind. Das ergibt also $5 \cdot 2 \cdot 1 = 10$ Möglichkeiten, die abhängigen Variablen auszuwählen. Da es allerdings nur auf die Menge der Spalten und nicht auf deren Reihenfolge ankommt, darf man die beiden Auswahlen $\{x_4, x_5, x_7\}$ und $\{x_5, x_4, x_7\}$ nur einmal zählen. Es bleiben also 9 Möglichkeiten für die Auswahl der Menge der abhängigen Variablen.

b) Sämtliche mögliche Auswahlen sind

$$\begin{gathered} \{x_1, x_4, x_7\},\ \{x_1, x_5, x_7\},\ \{x_3, x_4, x_7\},\ \{x_3, x_5, x_7\}, \\ \{x_6, x_4, x_7\},\ \{x_6, x_5, x_7\},\ \{x_8, x_4, x_7\},\ \{x_8, x_5, x_7\}, \\ \text{und} \qquad \{x_4, x_5, x_7\}. \end{gathered}$$

(G 18) Kontraposition

Gilt die Implikation $A \Rightarrow B$, so gilt auch die Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$, die sogenannte *Kontraposition.*
Bilden Sie die Kontraposition zu folgenden Aussagen:

a) Wenn die Sonne scheint, ist es hell.

b) Wenn p Primzahl ist, so gilt $p = 2$ oder p ist ungerade.

c) Wenn das Auto fährt, ist der Tank nicht leer.

d) Wenn der Mond aus grünem Käse ist, ist $3 = 4$.

LÖSUNG:

a) Wenn es nicht hell ist, scheint die Sonne nicht.

b) Wenn $p \neq 2$ und p gerade (nicht ungerade) ist, dann ist p keine Primzahl.

c) Ist der Tank leer, fährt das Auto nicht.

d) Wenn $3 \neq 4$ ist, ist der Mond nicht aus grünem Käse.

(G 19)

Gegeben seien die folgenden Aussagen

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0 \tag{1}$$
$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > 0 \tag{2}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : xy \leq 0 \tag{3}$$
$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : xy \leq 0 \tag{4}$$
$$\exists! x \in \mathbb{N} : x^2 = 1 \tag{5}$$

a) Formulieren Sie diese Aussagen jeweils in umgangssprachlicher Form.

b) Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

LÖSUNG:

a)
- Das Quadrat *jeder* reellen Zahl ist größer als 0.
- Es gibt (mindestens) eine reelle Zahl, der Quadrat größer als 0 ist.
  (*Umformulierung:* Es gibt reelle Zahlen mit Quadraten größer 0.)
- Zu jeder reeller reellen Zahl x gibt es eine relle Zahl y, so dass das Produkt xy kleiner gleich 0 ist.
- Es gibt (mindestens) eine reelle Zahl x, so dass das Produkt von x mit *jeder* reellen Zahl kleiner gleich 0 ist.
- Es gibt *genau eine* natürliche Zahl deren Quadrat 1 ist.
  (*Umformulierung:* Die Gleichung $x^2 = 1$ hat *eine einzige* Lösung in natürlichen Zahlen.)

b)
- Für $x = 0 \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 = 0$. Folglich ist die Aussage (1) falsch.
- Für $x = 1 \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 = 1 > 0$. Folglich ist die Aussage (2) wahr.
- Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wählt man nun $y = -x$, so ist $xy = -x^2 \leq 0$. Folglich ist die Aussage (3) wahr.
- Sei $x = 0$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt $xy = 0 \cdot y = 0 \leq 0$. Folglich ist die Aussage (4) wahr.
- In den reellen Zahlen hat die Gleichung $x^2 = 1$ bekanntlich genau die zwei Lösungen 1 und -1. Da aber -1 keine natürliche Zahl ist, ist 1 die einzige natürliche Lösung der Gleichung. Folglich ist die Aussage (5) wahr.

(G 20) De Morgansche Regeln

Man bezeichnet die folgende Aussage als die erste *de Morgansche Regel* für Mengen:
Sei M eine Menge und A, B Teilmengen von M. Dann gilt:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

(Hierbei bezeichnet $\overline{A}$ das Komplement von A in M, d.h. die Menge aller $x \in M$ mit $x \notin A$.)
Vervollständigen Sie folgenden Beweis:

$$\begin{aligned}
x \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow x \in M \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in M) \wedge \neg\,((x \in A) \wedge (x \in B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in M) \wedge (\neg\,(x \in A) \vee \neg\,(x \in B)) \\
&\Leftrightarrow \big((x \in M) \wedge \neg\,(x \in A)\big) \vee \big((x \in M) \wedge \neg\,(x \in B)\big) \\
&\Leftrightarrow (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B}) \Leftrightarrow x \in \big(\overline{A} \cup \overline{B}\big)\,.
\end{aligned}$$

Die Schreibweise $M \setminus A$ bedeutet, die Menge M ohne die Elemente, die in A enthalten sind.

Hausübungen

(H 16) (2+2 Punkte) Wiederholung

Beweisen Sie **mindestens 2** der folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{(Bernoullische Ungleichung).}$$

b) Für die Binomialkoeffizenten $C(n,k)$, die in Aufgabe (G 4) eingeführt wurden, gilt

$$C(n,k) = \frac{\prod_{i=n-k+1}^{n} i}{\prod_{h=1}^{k} h}, \quad \text{wenn } n \geq k \geq 0$$

c) Für die Fibonacci-Zahlen, die in Aufgabe (G 3) eingeführt wurden, gilt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \qquad \text{für } n \geq 0.$$

Bermerkung: Eine andere, sehr gängige Schreibweise für die in Teil b) zu beweisende Formel verwendet die in (G 3) eingeführte Fakultät:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{wenn } n \geq k \geq 0.$$

Lösung:

a) **Induktionsverankerung** $n = 1$**:** $(1+x) \geq 1 + x$.
Induktionsschritt $n \to n+1$**:** Aus der Voraussetzung folgt $1 + x > 0$, also gilt

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx).$$

Damit hat man

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x,$$

weil $x^2 > 0$ ist.

b) **Induktionsverankerung** $n = 0$**:**

$$C(0,0) = 1 = \frac{\prod_{i=1}^{0} i}{\prod_{j=1}^{0} j \prod_{h=1}^{0} h} \qquad \text{(leere Produkte!)}$$

Induktionsschritt $n \to n+1$**:** Wir betrachten $C(n+1,k)$ mit $k \in \{0,\ldots,n+1\}$ (und $n > 0$). Per Definition gilt

$$C(n+1,k) = \underbrace{C(n,k-1)}_{\substack{0 \text{ für } (k-1)<0 \\ 1 \text{ für } (n,k-1)=(0,0)}} + \underbrace{C(n,k)}_{=0 \text{ falls } k>n}$$

Wie müssen einige Fälle gesondert betrachten:

- Zunächst den Fall $(n, k-1) = (0,0)$. Dann hat man $C(n+1,k) = C(1,1) = 1 + C(0,1) = 1 + 0$. Die Behauptung ist hier richtig, denn
$$1 = \frac{\prod_{i=1}^{1} i}{\prod_{j=1}^{1} j \prod_{h=1}^{(1-1)} h}.$$
- Nun den Fall $k-1 < 0$, also $k = 0$. Dann hat man $C(n+1,0) = 0 + C(n,0) = 1$. Da
$$1 = \frac{\prod_{i=1}^{n+1} i}{\prod_{j=1}^{0} j \prod_{h=1}^{n+1-0} h}$$
ist die Behauptung in diesem Fall richtig.
- Nun den Fall $k > n$. Da $k \leq n+1$ (nach Vor.) gilt also $k = n+1$ (und insbesondere $k > 0$). Folglich hat man
$$C(n+1,n+1) = C(n,n) + 0 = 1 = \frac{\prod_{i=1}^{n+1} i}{\prod_{j=1}^{n+1} j \prod_{h=1}^{n+1-(n+1)} h},$$
Also gilt die Behauptung auch hier.

Da wir die Sonderfälle überprüft haben, dürfen wir nun Voraussetzen, dass $n \geq k \geq 0$. Nun kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhält:
$$\begin{aligned}
C(n+1,k) &= C(n,k) + C(n,k-1) = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{j=1}^{k} j \prod_{h=1}^{n-k} h} + \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{j=1}^{k-1} j \prod_{h=1}^{n-k+1} h} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n} i \left(\prod_{j=1}^{k} j \prod_{h=1}^{n-k} h + \prod_{j=1}^{k-1} j \prod_{h=1}^{n-k+1} h\right)}{\prod_{j=1}^{k-1} j \prod_{j=1}^{k} j \prod_{h=1}^{n-k} h \prod_{h=1}^{n-k+1} h} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n} i \prod_{j=1}^{k-1} j \prod_{h=1}^{n-k} h \left[(n+1-k) + k\right]}{\prod_{j=1}^{k-1} j \prod_{j=1}^{k} j \prod_{h=1}^{n-k} h \prod_{h=1}^{n-k+1} h} = \frac{(n+1) \prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{j=1}^{k} j \prod_{h=1}^{n+1-k} h} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n+1} i}{\prod_{j=1}^{k} j \prod_{h=1}^{n+1-k} h}.
\end{aligned}$$

c) Setze zunächst
$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
Induktionsverankerung $n = 0$: $\frac{1}{\sqrt{5}}(\psi^0 - \phi^0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1)0 = F_0$.
Induktionsschritt $n \to n+1$:
$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^n - \psi^n + \phi^{n+1} - \psi^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^{n-1}(\phi+1) - \psi^{n-1}(\psi+1)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^{n-1}\frac{1+\sqrt{5}+2}{2} - \psi^{n-1}\frac{1-\sqrt{5}+2}{2}\right),
\end{aligned}$$
nach Induktionsvoraussetzung. Durch Nachrechnen stellt man fest:
$$\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \psi^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Man hat also

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^{n-1} \cdot \phi^2 + \psi^{n-1} \cdot \psi^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^{n+1} - \psi^{n-1}\right).$$

Ergänzung zu Teil b): Alternativ kann man den Beweis auch unter Verwendung der Fakultätsfunktion aufschreiben, was wir nachfolgend skizzieren wollen.

Die **Induktionsverankerung** lautet: $C(0,0) = 1 = \frac{0!}{0!(0-0)!}$.
Im **Induktionsschritt** sind die selben Spezialfälle wie oben zu behandeln:

- Den Fall $(n, k-1) = (0,0)$. Wie oben hat man $C(n+1,k) = C(1,1) = 1 + C(0,1) = 1 + 0$. Man überprüft nun, dass
$$\frac{1!}{1!(1-1)!} = 1 = C(1,1).$$
- Den Fall $k - 1 < 0$, also $k = 0$. Man hat $C(n+1,0) = 0 + C(n,0) = 1$, und überprüft
$$\frac{(n+1)!}{(n+1-0)!0!} = 1 = C(n+1,0).$$
- Zuletzt den Fall $k > n$. Also $k = n+1$ (und insbesondere $k > 0$). Hier hat man
$$C(n+1,n+1) = C(n,n) + 0 = 1 = \frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+1-(n+1))!}.$$

Nach der Betrachtung der Sonderfälle kann man den Induktionsschritt mit der Annahme $n \geq k \geq 0$ formulieren, etwas übersichtlicher als oben, aber ansonsten analog:

$$\begin{aligned}
C(n+1,k) = C(n,k) + C(n,k-1) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!\big[(k-1)!(n+1-k)! + k!(n-k)!\big]}{k!(n-k)!(k-1)!(n+1-k)!} \\
&= \frac{n!(k-1)!(n-k)!\big[(n+1-k)+k\big]}{k!(n-k)!(k-1)!(n+1-k)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}.
\end{aligned}$$

(H 17) (2+2 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Aussagen

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > x \tag{6}$$
$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : n > x \tag{7}$$
$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x \geq n \tag{8}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = n \tag{9}$$
$$\exists n \in \mathbb{N}_0 : \exists! x \in \mathbb{R} : x^2 = n \tag{10}$$

a) Formulieren Sie diese Aussagen in mathematischer Umgangssprache!

b) Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

LÖSUNG:

a)
- Zu jeder reellen Zahl x gibt es (mindestens) eine natürliche Zahl n, die größer als x ist.
- Es gibt eine reelle Zahl, die kleiner als jede beliebige natürliche Zahl ist.
- Es gibt eine reelle Zahl, die größer gleich jeder beliebigen natürliche Zahl ist.
- Zu jeder natürliche Zahl n gibt es (mindestens) eine reelle Zahl x, mit der Eigenschaft, dass n das Quadrat von x ist.
- Es gibt eine natürliche Zahl n, zu der es *eine einzige* reelle Zahl x gibt, für die $x^2 = n$ gilt.

b)
- Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist $n := \lceil |x| \rceil + 1 \in \mathbb{N}$ und $n > x$. Die Funktion $\lceil \cdot \rceil$ rundet hierbei auf die nächste größere ganze Zahl auf. Folglich ist die Aussage (6) wahr.
- Für $x = -1 \in \mathbb{R}$ gilt $n > x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist die Aussage (7) wahr.
- Die Aussage (8) ist die Negation der Aussage (6). Folglich ist die Aussage (8) falsch.
- In den reellen Zahlen existiert zu jeder positiven Zahl die Quadratwurzel. Da die natürlichen Zahlen eine Teilmenge der positiven reellen Zahlen sind, kann für gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$ $x := \sqrt{n}$ gewählt werden, sodaß offensichtlich $x^2 = n$ gilt. Folglich ist die Aussage (9) wahr.
- Für $n = 0 \in \mathbb{N}_0$ hat die Gleichung $x^2 = n$ nur die Lösung $x = 0$. Folglich ist die Aussage (10) wahr.

Bemerkung: Man beachte den grundsätzlichen Unterschied zwischen den beiden letzten Aussagen. Die erste sagt aus, dass es in $\mathbb{R}$ eine Wurzel zu jeder natürlichen Zahl gibt. (Das stimmt, in der Regel ist allerdings neben $\sqrt{n}$ auch $-\sqrt{n}$ eine weitere Lösung der Gleichung $x^2 = n$.) Die zweite sagt aus, dass man eine natürliche Zahl finden kann, zu der es wirklich nur eine Lösung dieser Gleichung gibt. (Auch dass stimmt, wird aber falsch, wenn man $\mathbb{N}_0$ durch die natürlichen Zahlen ohne 0 ersetzt.)

(H 18) (3 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden logischen Implikationen bzw. Äquivalenzen wahr oder falsch sind:

				W	F
(i)	$n \in 2\mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	3 teilt $2^{2n} - 1$	☑	☐
(ii)	$2 \in 3\mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	17 ist prim	☑	☐
(iii)	17 ist prim	$\Longrightarrow$	$2 \in 3\mathbb{N}$	☐	☑
(iv)	7 teilt 15	$\Longrightarrow$	2 ist gerade	☑	☐
(v)	$\neg(A \wedge B)$	$\Longleftrightarrow$	$\neg A \vee \neg B$	☑	☐
(vi)	$\neg(A \vee B)$	$\Longleftrightarrow$	$\neg A \wedge \neg B$	☑	☐

LÖSUNG:

Nur die Implikation (iii) ist falsch. Alle anderen sind wahr.

(H 19) (5 Punkte) Zweite De Morgansche Regel

Beweisen Sie folgende Aussage, die sogenannte *zweite De Morgansche Regel*:
Sei M eine Menge und A, $B \subseteq M$. Dann gilt:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

(Wie in Aufgabe (G 20) bezeichnet $\overline{A}$ hierbei das Komplement von A in M, d.h. alle $x \in M$ mit $x \notin A$.)

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \in M \setminus (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in M) \wedge \neg\,((x \in A) \vee (x \in B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in M \wedge (\neg\,(x \in A) \wedge \neg\,(x \in B)) \\
&\Leftrightarrow \big(x \in M \wedge \neg\,(x \in A)\big) \vee \big(x \in M \wedge \neg\,(x \in B)\big) \\
&\Leftrightarrow (x \in \overline{A}) \wedge (x \in \overline{B}) \Leftrightarrow x \in \big(\overline{A} \cap \overline{B}\big)\,.
\end{aligned}$$