Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 5.11.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

4. Übung

Gruppenübungen

(G 16) Lineare Algebra Test

a) Der Rang einer Matrix ist

☐	die Anzahl ihrer Spalten,
☐	die Anzahl der 0-Zeilen,
☐	$n-$(Anzahl der 0-Zeilen in der Zeilenstufenform) wenn die Matrix n Zeilen und Spalten hat,
☐	die Anzahl der Nicht-0-Zeilen,
☐	die Anzahl der linear unabhängigen Spalten

b) Sie haben ein unterbestimmtes LGS mit m Zeilen und n Spalten und ℓ als Dimension des Lösungsraums. Die Variablen seien in abhängige und unabhängige Variablen aufgeteilt. Dann ist

W	F	Aussage
☐	☐	Die Anzahl der freien Variablen gleich dem Rang
☐	☐	Die Anzahl der abhängigen Variablen gleich dem Rang
☐	☐	$m = \text{Rang} + \ell$
☐	☐	$n = \text{Rang} + \ell$

c) Für das LGS $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $M = [\mathbf{v_1} \cdots \mathbf{v_n}]$ gilt

☐	wenn $\mathbf{b}$ im Erzeugnis von $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ liegt, dann ist das LGS lösbar.
☐	wenn das LGS lösbar ist, dann muss $\mathbf{b}$ im Erzeugnis von $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ liegen.

d) Gegeben sei ein LGS, die Variablen seien wie in b) aufgeteilt. Der Lösungsraum L des LGS

☐	ist stets ein Untervektorraum wenn das LGS homogen ist.
☐	ist stets ein Untervektorraum wenn das LGS inhomogen ist.
☐	hat immer Dimension größer Null.
☐	hat Dimension $n-$(Rang des LGS) bei einem homogenen $m \times n$ LGS.
☐	hat negative Dimension wenn das LGS unterbestimmt ist.
☐	ist die Menge der unabhängigen Variablen.
☐	ist beim zugehörenden homogenen LGS stets größer als beim inhomogenen.
☐	hat eine der Anzahl unabhängiger Variablen entsprechende Dimension …
☐	…und diese entspricht der Maximalzahl an linear unabhängiger Lösungen des homogenen Systems.
☐	kann durch ein Fundamentalsystem plus eine spezielle Lösung angegeben werden, wenn das LGS inhomogen ist.
☐	hat Dimension Null wenn keine Lösungen existieren.

(G 17)

Betrachten Sie folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ & & & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Auf wie viele Arten kann man die Menge der abhängigen Variablen im LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ auswählen?

b) Geben Sie jeweils zwei solche Auswahlen an!

Anleitung: Sortieren Sie die Spalten von A um, bis die Matrix in Zeilenstufenform vorliegt. Behalten Sie dabei im Blick, welche Spalte zu welcher Variable gehört.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		x_2	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
2	0	3	4	0	2	0	1	$\rightsquigarrow$	0	2	3	4	0	2	0	1	$\rightsquigarrow \dots$
			5	6	0	0	0					5	6	0	0	0	
						7	0								7	0	

(G 18) Kontraposition

Gilt die Implikation $A \Rightarrow B$, so gilt auch die Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$, die sogenannte *Kontraposition.*
Bilden Sie die Kontraposition zu folgenden Aussagen:

a) Wenn die Sonne scheint, ist es hell.

b) Wenn p Primzahl ist, so gilt $p = 2$ oder p ist ungerade.

c) Wenn das Auto fährt, ist der Tank nicht leer.

d) Wenn der Mond aus grünem Käse ist, ist $3 = 4$.

(G 19)

Gegeben seien die folgenden Aussagen

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0 \tag{1}$$
$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > 0 \tag{2}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : xy \leq 0 \tag{3}$$
$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : xy \leq 0 \tag{4}$$
$$\exists! x \in \mathbb{N} : x^2 = 1 \tag{5}$$

a) Formulieren Sie diese Aussagen jeweils in umgangssprachlicher Form.

b) Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(G 20) De Morgansche Regeln

Man bezeichnet die folgende Aussage als die erste *de Morgansche Regel* für Mengen:
Sei M eine Menge und A, B Teilmengen von M. Dann gilt:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

(Hierbei bezeichnet $\overline{A}$ das Komplement von A in M, d.h. die Menge aller $x \in M$ mit $x \notin A$.)
Vervollständigen Sie folgenden Beweis:

$$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \in M \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in M) \wedge \neg\left((x \in A) \wedge (x \in B)\right) \Leftrightarrow \cdots$$

Die Schreibweise $M \setminus A$ bedeutet, die Menge M ohne die Elemente, die in A enthalten sind.

Hausübungen

(H 16) (2+2 Punkte) Wiederholung

Beweisen Sie **mindestens 2** der folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

b) Für die Binomialkoeffizenten $C(n,k)$, die in Aufgabe (G 4) eingeführt wurden, gilt

$$C(n,k) = \frac{\prod_{i=n-k+1}^{n} i}{\prod_{h=1}^{k} h}, \quad \text{wenn } n \geq k \geq 0$$

c) Für die Fibonacci-Zahlen, die in Aufgabe (G 3) eingeführt wurden, gilt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \qquad \text{für } n \geq 0.$$

Bermerkung: Eine andere, sehr gängige Schreibweise für die in Teil b) zu beweisende Formel verwendet die in (G 3) eingeführte Fakultät:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{wenn } n \geq k \geq 0.$$

(H 17) (2+2 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Aussagen

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > x \tag{6}$$
$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : n > x \tag{7}$$
$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x \geq n \tag{8}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = n \tag{9}$$
$$\exists n \in \mathbb{N}_0 : \exists! x \in \mathbb{R} : x^2 = n \tag{10}$$

a) Formulieren Sie diese Aussagen in mathematischer Umgangssprache!

b) Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(H 18) (3 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden logischen Implikationen bzw. Äquivalenzen wahr oder falsch sind:

				W	F
(*i*)	$n \in 2\mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	3 teilt $2^{2n} - 1$	☐	☐
(*ii*)	$2 \in 3\mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	17 ist prim	☐	☐
(*iii*)	17 ist prim	$\Longrightarrow$	$2 \in 3\mathbb{N}$	☐	☐
(*iv*)	7 teilt 15	$\Longrightarrow$	2 ist gerade	☐	☐
(*v*)	$\neg(A \wedge B)$	$\Longleftrightarrow$	$\neg A \vee \neg B$	☐	☐
(*vi*)	$\neg(A \vee B)$	$\Longleftrightarrow$	$\neg A \wedge \neg B$	☐	☐

(H 19) (5 Punkte) Zweite De Morgansche Regel

Beweisen Sie folgende Aussage, die sogenannte *zweite De Morgansche Regel*:
Sei M eine Menge und A, $B \subseteq M$. Dann gilt:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

(Wie in Aufgabe (G 20) bezeichnet $\overline{A}$ hierbei das Komplement von A in M, d.h. alle $x \in M$ mit $x \notin A$.)