Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 11.02.2009

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

14. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 49) (Vektor- und Spatprodukt)

a) Wie hängt das von den folgenden 3 Vektoren aufgespannte Spatvolumen von $x \in \mathbb{R}$ ab? Warum?

$$\vec{a} = \frac{\vec{e}_1 - \vec{e}_2}{2}, \qquad \vec{b} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \qquad \vec{c} = 2\vec{e}_2 - x\vec{e}_3$$

b) Berechne das Volumen der von den 3 folgenden Vektoren gebildeten Pyramide

$$\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \qquad \vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \qquad \vec{c} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Hinweis: Wie verhalten sich die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ zueinander? Das Volumen einer Pyramide berechnet sich gemäß $V = \frac{1}{3}Gh$ (G ist die Grundfläche, h ist die Höhe).

LÖSUNG:

a)

$$V = \begin{vmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -x \end{vmatrix} = 1.$$

Das Volumen hängt demnach nicht von x ab. Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = 1/2\vec{e}_1 + 1/2\vec{e}_2$ liegt orthogonal zu $x\vec{e}_3$, d.h. in der durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.

b) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind jeweils paarweise orthogonal. Somit ist die Grundfläche der Pyramide ein rechtwinkliges Dreieck, auf dem der dritte Vektor senkrecht steht (und damit auch die Höhe darstellt). Da die Grundfläche der Pyramide die hälfte von der Grundfläche des Parallelotops ist, gilt für das Volumen der Pyramide

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3}Gh = \tfrac{1}{6}[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \\ &= \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

(G 50) (Flächeninhalt)

a) Skizziere die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Wie groß ist die Fläche, die von dem Graphen der Funktion und der x-Achse eingeschlossen wird?

b) Bestimme mit Hilfe der Substitution $x = \sin(t)$ das Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

LÖSUNG:

a) Der gesuchte Flächeninhalt ist $\pi/2$, da es sich um einen Halbkreis mit Radius 1 handelt. In b) wird das durch Integration bewiesen.

b) Die Substitution $x = \sin(t)$ ergibt

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t)dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)dt.$$

Mit partieller Integration erhält man

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)dt = [\sin(x)\cos(x)]_{-\pi/2}^{+\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(t)dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - \cos^2(t)dt.$$

Daraus folgt

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)dt = \frac{\pi}{2}.$$

(G 51) (Uneigentliches Integral)

Untersuche, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechne gegebenenfalls ihren Wert unter Verwendung der Substitutionsregel.

a)

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)/\sqrt{\sin(x)}\,dx \equiv \lim_{a\to 0+} \int_a^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx$$

b)

$$\int_0^{\infty} x/(x^2+1)^3\,dx \equiv \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$$

LÖSUNG:

a) Wir verwenden die *Substitution* $t = \sin(x)$ mit $dt = \cos(x)dx$ und erhalten

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx = \lim_{a\to 0+} \int_a^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx = \lim_{a\to 0+} \int_{\sin a}^{1} 1/\sqrt{t}\,dt =$$

$$\lim_{a\to 0+} 2\sqrt{t}|_{\sin a}^{1} = \lim_{a\to 0+} [2 - 2\sqrt{\sin(a)}] = 2.$$

Also existiert dieses Integral.

b) Hier ist die *Substitution* $t = x^2 + 1$ mit $dt = 2xdx$ erfolgreich. Es folgt

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{2x}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \int_1^{b^2+1} 1/t^3\,dt = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} [-\frac{1}{2t^2}]|_{t=1}^{b^2+1} = 1/4$$

und dieses Integral existiert auch.

Hausübungen

(H 51) (Reihen)

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^2}$.

LÖSUNG:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Nach Beispiel 16 auf Seite 101 und Leibnitz-Kriterium konvergieren die beiden Reihen.

b) Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 1$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + 1 \neq 0$ divergiert die Reihe.