Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 28.01.2009

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

12. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 43) (Regeln von de l'Hospital)

Bestimme folgende Grenzwerte mit der Regel von de l'Hospital.

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{4x^2-8x}{x^2-x-2}$

c) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

Lösung:

a) Es ist $\lim_{x\to\infty} \ln x = \lim_{x\to\infty} x = \infty$; wir wenden L'Hospital an: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{4x^2-8x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{8x-8}{2x-1} = \frac{8}{3}$

c) Wir formen zunächst um: $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$. Also ist $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x \ln x}$, da die Exponentialfunktion stetig ist. Um nun auf $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ l'Hospital anzuwenden, müssen wir den Ausdruck erst in die Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ bringen. Dazu

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(-1)x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Also ist $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.

(G 44) (Substitution)

Berechne

a) $\int_0^2 x e^{x^2}\, dx$,

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \cos^3 x) dx$

mittels Substitution.

Lösung:

a) $\int_0^2 x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x) e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^4 e^y dy = \frac{1}{2}(e^4-1)$. Substitution $y = x^2$.

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \cos^3 x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2-\sin^2 x)\cos x\, dx = \int_{-1}^{1} (2-y^2) dy = [2y - \frac{1}{3}y^3]_{-1}^{1} = 4 - \frac{2}{3}$. Substitution $y = \sin x$.

(G 45) (Integrierbarkeit)

a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ gegeben und f ist integrierbar auf jedem $[\alpha, b],\ \alpha > a$. Zeige, dass f auch auf $[a, b]$ integrierbar ist.

Hinweis: Konstruiere eine monoton fallende Folge h_n und eine monoton wachsende Folge g_n von Treppenfunktionen mit $h_n, g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g_n \leq f \leq h_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $h_n = M$ und $g_n = m$ auf $[a, c_n)$ mit $c_n = a + \frac{1}{2n(M-m)},\ n \in \mathbb{N}$ gilt. Versuche auf $[c_n, b]$ diese Funktionen so zu wählen, dass es $\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n = I$ für ein $I \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Ist die Funktion $\sin \frac{1}{x}$ auf $[0, b]$ integrierbar?

LÖSUNG:

a) Um das zu beweisen, konstruieren wir zwei Folgen von Treppenfunktionen $g_n, h_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g_n \leq f \leq h_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass es ein $I \in \mathbb{R}$ existiert mit $\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n = I$.

Wir betrachten die Folge $c_n = a + \frac{1}{2n(M-m)}, n \in \mathbb{N}$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ und c_n ist monoton fallend. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $c_n < b$ für alle $n \geq N$ ist. Die Funktion f ist auf jedem $[c_n, b],\ n \geq N$ integrierbar. Da die Funktion f auf $[c_N, b]$ integrierbar ist, gibt es zwei Treppenfunktionen $u, v : [c_N, b] \to \mathbb{R},\ u \leq f \leq v$ mit $\int_{c_N}^b (v(x) - u(x))dx < \frac{1}{N}$.

Wir setzen $h_n \equiv M,\ g_n \equiv m,\ n = 1, ..., N-1$ für $x \in [a, b]$, $h_N \equiv v,\ g_N \equiv u$ auf $[c_N, b]$ und $h_N \equiv M,\ g_N \equiv m$ für $x \in [a, c_N)$. Es gilt $\int_a^b (h_N(x) - g_N(x))dx < \frac{1}{N}$.

Für $n > N$ konstruieren wir die Funktionen h_n, g_n auf folgende Weise. Da die Funktion f auf $[c_{N+1}, b]$ integrierbar ist, gibt es wieder zwei Treppenfunktionen $u, v : [c_{N+1}, b] \to \mathbb{R},\ u \leq f \leq v$ mit $\int_{c_{N+1}}^b (v(x) - u(x))dx < \frac{1}{N+1}$. Wir setzen $h_{N+1} = \min\{v, h_N\},\ g_{N+1} = \max\{u, g_N\}$ auf $[c_{N+1}, b]$ und $h_{N+1} \equiv M,\ g_{N+1} \equiv m$ für $x \in [a, c_{N+1})$. Dann haben wir $\int_a^b (h_{N+1}(x) - g_{N+1}(x))dx < \frac{1}{N+1}$. Auf diese Weise entstehen zwei Folgen von Treppenfunktionen $g_n, h_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g_{n-1} \leq g_n \leq f \leq h_n \leq h_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, für die $\int_a^b (h_n(x) - g_n(x))dx < \frac{1}{n},\ n \geq N$ gilt.

Da die Folge von Treppenfunktionen g_n monoton steigend ist, steigt auch die Folge $\int_a^b g_n(x)dx$ monoton. Sie ist ausserdem z.B durch $M(b-a)$ von oben beschränkt. Daraus folgt, dass die Folge $\int_a^b g_n(x)dx$ konvergiert und es existiert ein $I \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx = I$. Da die Folge $\int_a^b h_n(x)dx$ monoton fallend und von unten beschränkt ist, konvergiert diese Folge auch. Aus $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (h_n(x) - g_n(x))dx = 0$ folgt daher, dass $\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(x)dx = I$ ist.

b) Ja, nach dem a).

Hausübungen

(H 45) (Regeln von de l'Hospital)

(1+1+1P)

Berechne folgende Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3+x^2-4x-4}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

LÖSUNG:

a)

$$\lim_{x\to 1} x^2+x-2=0 \quad \text{aber} \quad \lim_{x\to 1} x^3+x^2-4x-4=-6.$$

Damit ist $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^4-3x^2+2x+1}=0$ und die Regel von l'Hospital ist hier nicht anwendbar!

b)

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} (= \infty \text{ durch } \infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} (= \text{„0 durch 0"}) = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{3\cos(3x)} = \frac{2}{3}$$

(H 46) (Gleichmässige Stetigkeit)

(8P)

Entscheide, ob die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\to \frac{1}{1+x^2}$$

gleichmäßig stetig ist.

LÖSUNG:

Die Funktion f ist gleichmässig stetig, denn es gilt

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\right| &= \frac{|y^2+1-(x^2+1)|}{(1+x^2)(1+y^2)} \\
&= \frac{|x+y||x-y|}{\underbrace{(1+x^2)}_{\geq 1}\underbrace{(1+y^2)}_{\geq 1}} \\
&\leq \left(\frac{|x|}{\underbrace{1+x^2}_{\geq 2|x|}} + \frac{|y|}{\underbrace{1+y^2}_{\geq 2|y|}}\right)|x-y| \\
&\leq |x-y|
\end{aligned}$$

(Hier haben wir die Ungleichung $a^2+b^2 \geq 2ab$ verwendet.) Daher gibt es für beliebiges $\varepsilon>0$ ein $\delta:=\varepsilon$, so dass für alle $x,y\in\mathbb{R}$ mit $|x-y|<\delta$ die Abschätzung $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ gilt.

(H 47) (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

(4+5P)

a) Der Mittelwert der auf $[a,b]$ integrierbaren Funktion $f(x)$ ist $M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Bestimme den Mittelwert M für die Funktionen: $f_1(x) = \sin x$ auf $[a,b] = [0,\pi]$, $f_2(x) = x^2$ auf $[a,b] = [0,1]$ und $f_3(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ auf $[a,b] = [-1,1]$. Kann man für jede von diesen Funktionen ein $\xi \in (a,b)$ finden, so dass $f(\xi) = M$ ist?

b) Sei durch $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f \not\equiv 0$ gegeben. Zeige, dass es ein $[c,d] \subset [a,b]$ existiert, so dass $\int_c^d f(x)dx \neq 0$ gilt.

LÖSUNG:

a) Der Mittelwert M_1 der Funktion $f_1(x) = \sin x$ auf $[0,\pi]$ ist $M_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d(\cos x) = \frac{2}{\pi}$. Der Mittelwert M_2 der Funktion $f_2(x) = x^2$ auf $[0,1]$ ist $M_2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für jede von den beiden Funktionen f_1 und f_2 lässt sich ein $\xi_i \in (a,b), i = 1,2$ finden, so dass $M_i = f_i(\xi_i), i = 1,2$ ist.

Der Mittelwert M_3 der Funktion $f_3(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ ist $M_3 = \frac{1}{2}(-\int_{-1}^0 dx + \int_0^1 dx) = 0$. Für diese Funktion kann man den Mittelwertsatz der Integralrechnung nicht anwenden, da sie nicht stetig auf $[-1,1]$ ist. Es lässt sich auch kein $\xi \in (a,b)$ finden, so dass $M_3 = f_3(\xi)$ ist, weil $M_3 = 0$ und $f_3(x) \neq 0$ für alle $x \in [-1,1]$ ist.

b) Da $f \not\equiv 0$ ist, gibt es ein $x' \in [a,b]$ mit $f(x') \neq 0$. Sei o.B.d.A. $f(x') > 0$. Da f stetig ist, gibt es für $\epsilon = f(x')$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in U_\delta(x') \cap [a,b]$ die Ungleichung $|f(x) - f(x')| < f(x') \Rightarrow f(x) > 0$ gilt. Wir bezeichnen $[c,d] \equiv U_\delta(x') \cap [a,b]$. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi \in (c,d)$, so dass $\int_c^d f(x)dx = f(\xi)(d-c) > 0$. Damit ist die Behauptung bewiesen.