Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/09 28.11.2008

Höhere Mathematik I

6. Übung

Abgabe Hausübungen: W. 49

Gruppenübungen

(G 21)

Sind folgende Funktionen surjektiv? Sind sie injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort! Bestimmen Sie, falls möglich, die Umkehrfunktion.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = 3x$ für $x \in D(f) = \mathbb{Z}$,

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 3x$ für $x \in D(g) = \mathbb{R}$,

(c) $h : \mathbb{Z} \to \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \text{ gerade}\}$, $h(n) = 2n$,

(d) $i : \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \text{ungerade}\} \to \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \text{ gerade}\}$, $i(n) = 2n$,

(G 22)

Bestimmen Sie für folgende Funktionen die größte Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ so, dass die Funktionen $f_i : X_i \to f(X_i) = B(f_i) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in \mathbb{R} \text{so dass } f(x) = y\}$ bijektiv sind. (Es kann mehrere solcher Mengen geben). Geben Sie das Bild $B(f_i)$ an und bestimmen Sie, falls möglich, die Umkehrfunktion.

(a) $f_1(x) = x^2$,

(b) $f_2(x) = x^3$,

(c) $f_4(x) = x^2 + 1$.

(G 23)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, d.h. $f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

(G 24)

Bestimmen Sie den rechts bzw. linksseitigen Grenzwert der folgenden Funktionen in $x_0 \in \{0, 1, -1\}$. Sind die Funktionen stetig in x_0?

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0) \\ x^2 - 1, & x \geq 0. \end{cases}$

(b) $g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{|x^2 - 1|}$, $x \in \mathbb{R}$,

(c) $h(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1, \\ x^2, & x > 1, \\ -x^2, & x < -1. \end{cases}$

Hausübungen

(H 11) [4+2+4P]

Es sei $X = [1,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1\}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} \text{ für } x \in A$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, daß f injektiv ist.

(b) Bestimmen Sie das Bild von f, $B = B(f) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in A \text{ so dass } f(x) = y\}$.

(c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$.

(H 12) [2+2+2+2P]

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte $\lim_{x \searrow x_0} f_i(x)$, $\lim_{x \nearrow x_0} f_i(x)$ und $\lim_{x \to x_0} f(x)$, soweit diese existieren.

(a) $f_1(x) = \frac{1}{(4-x)^2}$ für $x \in D(f_1) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$,

(b) $f_2(x) = \frac{\sqrt{|x|}-3}{x-9}$ für $x \in D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{9\}$,

(c) $f_3(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ für $x \in D(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$,

(d) $f_4(x) = \frac{2x}{x^2-5x}$ für $x \in D(f_4) = \mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 5x = 0\right\}$,

(e) $f_5(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1}$ für $x \in D(f_5) = \mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 1 = 0\right\}$.