**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/09 21.11.2008

# Höhere Mathematik I

## 5. Übung

Abgabe Hausübungen: W. 48

## Gruppenübungen

**(G 17)**

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k}$$

konvergiert.

**(G 18)**

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

konvergiert.

**(G 19) [Wurzelkriterium]**

Sei $\{a_n\}_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen. Nehmen Sie an, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \to r$. Zeigen Sie, dass, falls $0 \leq r < 1$, die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut konvergiert. Und falls $r > 1$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert. (*Hinweis: Vergleichen Sie mit der geometrischen Reihe.)*

**(G 20)**

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt{k!}}$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} kq^k$ mit $|q| < 1$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}$,

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n-n}$.

*(Hinweis: Sie können das Wurzel- und Quotientkriterium benutzen (siehe G19 und H9)).*

# Hausübungen

**(H 9) [Quotientkriterium 10P]**

Sei $\{a_n\}_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen. Nehmen Sie an, dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to r$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass, falls $0 \leq r < 1$, die Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Und falls $r > 1$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert. (*Hinweis: Vergleichen Sie mit der geometrischen Reihe.)*

**(H 10) [10P]**

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$