Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2008/09 12.11.2008

Höhere Mathematik I

4. Übung

Abgabe Hausübungen: W. 48

Gruppenübungen

(G 12)

Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = 1 + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

(a) Begründen Sie, warum die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(b) Bestimmen Sie für $\varepsilon_1 = \frac{1}{10}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{30}$ und $\varepsilon_3 = \frac{1}{100}$ jeweils ein $N(\varepsilon_i) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon_i \text{ für } n \geq N(\varepsilon_i),\ 1 \leq i \leq 3.$$

(G 13)

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie falls existent den Grenzwert an.

(a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$,

(b) $b_n = \frac{n^2+2n+1}{2n^3+2n}$,

(c) $c_n = \frac{5n+3}{2n+1}$,

(d) $d_n = 2^n$.

(G 14)

Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

(G 15)

Falls existent, berechnen Sie folgende Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$ für

(i) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, (ii) $a_n = n2^{-n}$ (iii) $a_n = \frac{\pi^n}{n!}$, (iv) $a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$

(G 16)

Sei $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Zeigen Sie, in folgenden drei Schritten, dass a_n konvergiert wenn $n \to \infty$:

(a) Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!}$ für $k \ge 1$.

(b) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$ für $k \ge 1$.

(c) Zeigen Sie, dass $a_n \le 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \le 3$ für $n \ge 1$.

(d) Zeigen Sie, dass a_n monoton wachsend ist. (Hinweis: Bernoullische Ungleichung aus G7: $(1+x)^n \ge 1 + nx$ für jede $n \ge 1$ und $x > -1$.)

(e) Zeigen Sie, dass a_n konvergiert, $\lim_{n\to\infty} a_n = e$ mit $2 \le e \le 3$.

Bemerkung: Die Zahl e ist hier durch die obige Grenzwert definiert.

Hausübungen

(H 7) [10P]

Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$ für

(a) $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

(b) $a_n = \frac{n!}{n^n}$,

(c) $a_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$,

(d) $a_n = n^k 2^{-n}$ für beliebige (feste) $k \in \mathbb{N}$.

(H 8) [10P]

Sei $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ und $\{c_n\}$ drei Folgen mit $a_n \le b_n \le c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$ folgt das $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

(b) Zeigen Sie, daß $\sqrt[n]{n} \to 1$. *(Hinweis: Benutzen Sie daß Resultat aus (a) und der Binomialsatz, d.h. aus H4:* $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ *mit* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$*.)*