



Höhere Mathematik I

11. Übung

Abgabe Hausübungen: W. 7

Gruppenübungen

(G 44)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^b f(x) dx$, $b \geq 0$, für $f(x) = x^2$ durch Approximation mit Treppenfunktionen. Betrachten Sie dazu folgende Folgen von Treppenfunktionen:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_k = \frac{b}{n}k$, $0 \leq k \leq n$. Zu dieser Unterteilung definieren wir die Treppenfunktionen

$$\begin{aligned}\varphi_n : [0, b] &\rightarrow \mathbb{R}, & \varphi_n(x) &= f(x_{k-1}) \text{ für } x \in [x_{k-1}, x_k), \\ \psi_n : [0, b] &\rightarrow \mathbb{R}, & \psi_n(x) &= f(x_k) \text{ für } x \in [x_{k-1}, x_k).\end{aligned}$$

- (a) Zeichnen Sie f , φ_n , ψ_n für $n = 4$ und $b = 2$.
- (b) Berechnen Sie $\int_0^b \varphi_n(x) dx$, $\int_0^b \psi_n(x) dx$.
- (c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \psi_n(x) dx = \frac{b^3}{3}.$$

- (d) Folgeren Sie, dass f integrierbar ist und berechnen Sie $\int_0^b f(x) dx$.

(Hinweise: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.)

(G 45)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\begin{aligned}\text{(a)} \int_0^{6\pi} \sin x dx, & \quad \text{(b)} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx & \quad \text{(c)} \int_2^5 x^3 dx, \\ \text{(d)} \int_0^{2\pi} e^{3x} dx, & \quad \text{(e)} \int_{-1}^1 x e^{x^2} dx.\end{aligned}$$

(G 46)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmte Integrale unter Verwendung partieller Integration.

$$(a) \int x^2 \ln x dx, \quad (b) \int \arctan x dx, \quad (c) \int x e^{-x} dx,$$

$$(d) \int \sqrt{x} \ln x dx, \quad (e) \int e^x \cos x dx.$$

(G 47)

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit der Substitutionsregel.

$$(a) \int \cos x e^{\sin x} dx, \quad (b) \int_0^1 \frac{1}{e^x + 2 + 2e^{-x}} dx, \quad (c) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx$$

$$(d) \int \frac{1}{x \ln x} dx, \quad (e) \int \frac{1}{\sin x + 2} dx.$$

(Hinweise für (e): Die Substitution ist durch $u = \tan \frac{x}{2}$ gegeben. Siehe auch H13)

Hausübungen

(H 21) [2+2+2+2+2P]

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$(a) \int e^{-x} \sin x dx, \quad (b) \int \frac{1}{\sin x + 2} dx, \quad (c) \int (\ln x)^2 dx,$$

$$(d) \int \ln(1+x^2) dx, \quad (e) \int \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx.$$

(H 22) [2+2+2+2+2P]

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$(a) \int_0^1 e^x \ln(1+e^x) dx, \quad (b) \int_0^1 \cos\left(x^{\frac{1}{3}}\right) dx, \quad (c) \int_0^b \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 t^2} dt, \quad a, b > 0 \text{ Konst.},$$

$$(d) \int_0^{2\pi} e^{-x} |\sin x| dx, \quad (e) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\cosh x}.$$

(Hinweise: $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.)