Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/09 22.1.2009

Höhere Mathematik I

10. Übung

Abgabe Hausübungen: W. 6

Gruppenübungen

(G 38)

Geben Sie die Taylorpolynome vom Grad 3 in x_0 für folgende Funktionen an:

(a) $\cos x$, $x_0 = 0$,

(b) $\ln x$, $x_0 = 1$,

(c) e^x, $x_0 = 0$,

(d) $\tan x$, $x_0 = 0$,

(e) $\frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$,

(f) $\sin(\ln x)$, $x_0 = 1$,

(g) $e^{\cos x}$, $x_0 = 0$.

(G 39)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$,

(c) $\lim_{x\to 0} (\sin x) \ln|x|$,

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$.

(G 40)

Bestimmen Sie für die Funktionen f_1, f_2 und f_3 alle Extremstellen, sowie deren Typ.

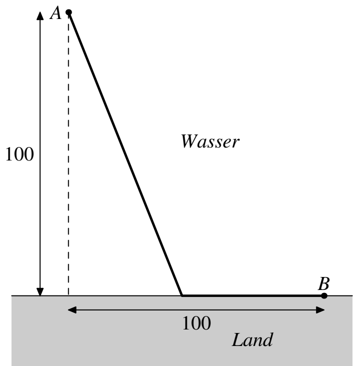
(a) $f_1(x) = x^3 e^{-x}, x \in \mathbb{R}$,

(b) $f_2(x) = \frac{x}{\ln x}, x > 0, x \neq 1$,

(c) $f_3(x) = \frac{x+2}{x^2+1} + 2 \arctan x,\ x \in \mathbb{R}$.

(G 41)

Ein Fischer befindet sich in seinem Boot im Punkt A auf einem See und will so schnell wie möglich Punkt B am Ufer erreichen. An welchem Punkt muß er dazu an Land gehen, wenn er sich auf dem Land mit der zehnfachen Geschwindigkeit wie im Wasser (10 bzw. 1, Rechnung ohne Einheiten) bewegt?



(G 42)

Die Taylorreihe einer glatten Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in [a,b]$ ist durch

$$T(x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

definiert.

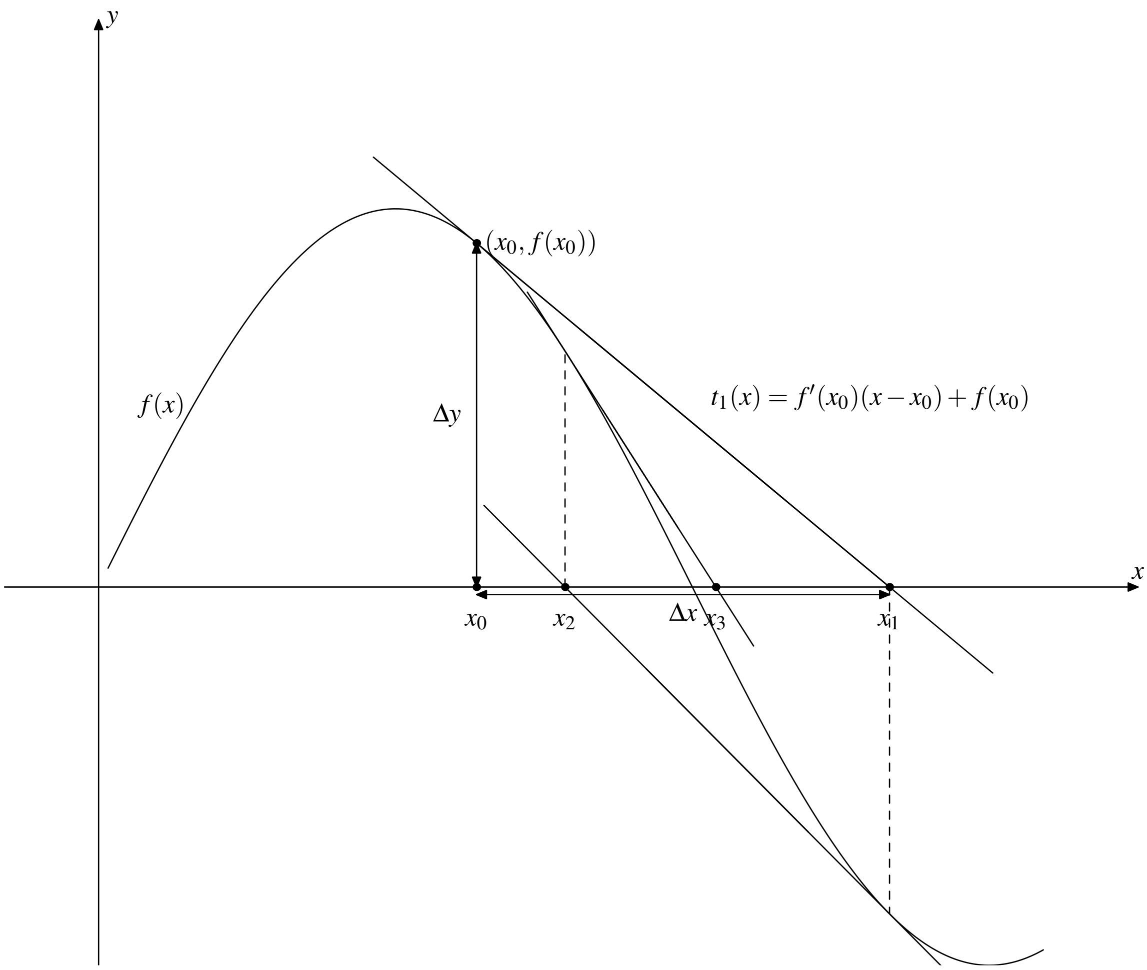
(a) Benutzen Sie das taylorsche Gesetz mit Rest um zu zeigen, dass die obige Reihe konvergiert für $x \in [a,b]$, falls es ein $C > 0$ gibt mit $\left| f^{(n)}(x) \right| < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [a,b]$.

(b) Geben Sie die Taylorreihe im Punkt $x_0 = 0$ für $\sin x$ an und zeigen Sie, dass die Reihe konvergiert für $x \in \mathbb{R}$.

(G 43) [Das Newtonsche Näherungsverfahren]

Um eine Nullstelle einer differenzierbaren Funktion zu ermitteln, ersetzt man die Kurve in der Nähe der Nullstelle durch ihre Tangente. Deren Schnittpunkt mit der x-Achse liegt in der Regel bereits sehr nahe an der gesuchten Nullstelle, und indem man dort wieder die Tangente nimmt, erzielt man immer bessere Näherungswerte. Um also die Berechnungsvorschrift für die iterierten Werte: $x_1, x_2, \ldots$ mit dem Startwert x_0 zu erhalten, entnehmen wir der nebenstehenden Zeichnung die Beziehung für der Richtung die Tangente:

$$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}.$$



Nach einer Umformung bekommen wir folgende Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

falls $f'(x_n) \neq 0$. Löse näherungsweise die Gleichung $f(x) = x^2 - 2 = 0$ mit 3 Iterationen und $x_0 = 1$.

Hausübungen

(H 19) [10P]

Benutzen Sie die Definition der Ableitung um zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

(Hinweis: Betrachten Sie den Logarithmus der Gleichung.)

(H 20) [2+2+2+2+2P]

Geben Sie die Taylorpolynome vom Grad 3 im Punkt $x_0 = 0$ für folgende Funktionen an:

(a) $e^x\left(1-x^2\right)$,

(b) $\ln\left(1-x^2\right)$,

(c) $e^{x^2}\cos x$,

(d) $\ln(1+\sin x)$,

(e) $e^{\sin x}$.