Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009 3.7.2009

Höhere Mathematik II

10. Übung

Abgabe Hausübungen: W. 29

Gruppenübungen

(G 24)

Gegeben sei die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 4 & 16 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A_i, $i = 1,2$.

(b) Ermitteln Sie die Dimension vom Kern und des Bild der zu A_i gehörigen linearen Abbildung, $i = 1,2$.

(c) Bestimmen Sie Basen für den Kern und das Bild von A_i, $i = 1,2$.

(G 25)

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der x_1-Achse und $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Winkelhalbierenden $x_2 = x_1$.

(a) Bestimmen Sie die Matrizen der linearen Abbildungen φ, ψ, $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$. Machen Sie sich geometrisch klar, was die beiden letzten Abbildungen beschreiben.

(b) Bestimmen Sie alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ so dass $\varphi(v) = v$ oder $\varphi(v) = -v$.

(c) Bestimmen Sie alle Vektoren $w \in \mathbb{R}^2$ so dass $\psi(w) = v$ oder $\psi(w) = -w$

(D.h. v bzw. w sind Eigenvektoren von φ bzw. ψ mit den Eigenwerten 1 oder -1.)

Hausübungen

(H 10) [5+3+2P]

Seien $\theta > 0$, L_θ die Gerade $x_2 = x_1 \tan\theta$ in $\mathbb{R}^2$ und $S(\theta)$ die Spiegelung in L_θ. Sei $R(\theta)$ die rotation mit Winkel θ um Nullpunkt.

(a) Zeigen Sie, dass $S(\theta)$ und $R(\theta)$ durch die Matrizen

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

gegeben sind.

(b) Zeigen Sie, dass $S(\theta) \circ R(\theta)$ eine Spiegelung ist.

(c) Zeigen Sie, dass $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.