TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4. Übung zu linearen Opeartoren - Lösungsvorschlag

19.

a) Sei $x \in X$ und $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x$. Dann ist $(Tx_n) \subseteq Y$ ein Cauchyfolge, also auch konvergent gegen ein y, da Y vollständig ist. Definiere die Fortsetzung so: $Tx := y$. Man zeige die Eindeutigkeit dieser Definition. Die Linearität ist trivial und die Stetigkeit der Fortsetzung folgt aus $\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \le \lim_{n\to\infty} \|T\|\|x_n\| = \|T\|\|x\|$.

b) 3ε Argument: Es gilt

$$\|T_m x - Tx\| \le \|T_m x - T_m y\| + \|T_m y - Ty\| + \|Ty - Tx\| \le \|T_m\|\|x - y\| + \|T_m y - Ty\| + \|T\|\|x - y\|.$$

Also wähle zunächst $y \in D$ mit $\|x - y\| \le \varepsilon/M$, und dann für festes y beachte die Konvergenz des mittleren Terms.

c) Linearität ist klar. Falls $(m_n) \in \ell^\infty$, ist der Operator beschränkt, und hat eine stetige Fortsetzung auf ℓ^p, die auch noch durch die obige Multiplikation gegeben ist. Umgekehrt muss (m_n) beschränkt sein, denn betrachte $\delta_n \in \ell^p$. Dann gilt $M\delta_n = (0, 0, \dots, m_n, \dots)$ und $\|\delta_n\|_p = 1$, also folgt aus $|m_n| = \|M\delta_n\| \le \|M\|$ die Beschränktheit von (m_n).

20.

a) $\|R\| = 1$ und $\|L\| \le 1$ sind trivial, es gilt sogar $\|Rx\| = \|x\|$. Weiter gilt $L(0, 1, 0, \dots) = (1, 0, 0, \dots)$, also $\|L\| = 1$. Klar ist, dass $\|M(x_1, x_2, \dots)\| = \|(m_1 x_1, m_2 x_2, \dots)\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n| \cdot \|(x_1, x_2, \dots)\|$, d.h. $\|M\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|$. Sei $n_k \in \mathbb{N}$, so dass $m_{n_k} \to \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|$ für $k \to \infty$ gilt. Sei $(x_n^k) \in \ell^p$ definiert durch $x_{n_k}^k = 1$ und $x_i^k = 0$ falls $i \ne n_k$. Dann $\|M(x_n^k)\| = |m_{n_k}| \to \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|$, also $\|M\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|$. Analog beweist man $\|ML\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|$.

b) Es geht alles im Wesentlichen so wie im Falle $n = 1$, also $\|R^n\| = \|L^n\| = 1$ und $\|M^n\| = \sup_{k=1} |m_k^n|$, ferner gilt $\|T^n\| = \sup_{k\ge 0} |m_{k+1}| \cdot |m_{k+2}| \cdots |m_{k+n}|$.

c) Es gilt $L^n x \to 0$ stark. Denn: für festes $x \in \ell^p$ sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\sum_{k=N}^\infty |x_k| \le \varepsilon$. Daher $\|L^N x\|_p \le \varepsilon^{1/p}$. Es gilt jedoch $\|L^n\| = 1$, also L^n konvergiert gegen kein $S \in \mathscr{L}(X)$ in Operatornorm, sonst würde es auch stark gegen S konvergieren, was aber $S = 0$ bedeutet. Ein Widerspruch mit $1 = \|L^n\| \to \|S\| = 0$.

R^n konvergiert stark gegen kein $S \in \mathscr{L}(X)$. Denn: $\|R^n x\| = \|x\|$, aber $R^n x \to Sx$ impliziert $(R^n x)(k) \to (Sx)(k)$. Es gilt $(R^n x)(k) \to 0$, also $(Sx)(k) = 0$, d.h. $S = 0$. Ein Widerspruch mit $\|x\| = \|R^n x\| \to \|Sx\| = 0$.

21.

a) Es gilt

$$\begin{aligned}\|Tf\|_\infty &\le \sum_{|\alpha|\le k} \|a_\alpha D_\alpha f\|_\infty \le \sum_{|\alpha|\le k} \|a_\alpha\|_\infty \|D_\alpha f\|_\infty \\ &\le \max_{|\alpha|\le k} \|a_\alpha\|_\infty \sum_{|\alpha|\le k} \|D_\alpha f\|_\infty = M\|f\|_{C^k(\bar\Omega)}.\end{aligned}$$

b) Für $f \in C^1$ mit $\|f\|_{C^1} \le 1$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \le \int_x^y |f'(t)| \,\mathrm{d}t \le |x - y|.$$

Dies bedeutet nach dem Satz von Arzelà-Ascoli, dass $B_{C^1}(0,1)$ in $C([0,1])$ relativ kompakt ist, d.h. der Identitätsoperator is kompakt.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

c) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und wähle $\delta > 0$ nach der gleichmässigen Stetigkeit von k auf $[0,1]^2$. Sei $\|f\|_\infty \leq 1$. Es gilt für $z < x$:

$$|(Sf)(x) - (Sf)(z)| \leq \left| \int_0^x k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^z k(z,y)f(y)\,\mathrm{d}y \right| \leq$$
$$\left| \int_0^x k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^z k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \right| + \left| \int_0^z k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^z k(z,y)f(y)\,\mathrm{d}y \right|$$
$$\leq |x-z| \cdot \|k\|_\infty \|f\|_\infty + \varepsilon \|f\|_\infty \leq |x-z| \cdot \|k\|_\infty + \varepsilon \|f\|_\infty$$

falls $|x - z| < \delta$. Dies Zeigt, dass die Funktionen Tf, $\|f\|_\infty \leq 1$ gleichgradig stetig sind. Verwende den Satz von Arzelà-Ascoli um die Behauptung zu bekommen.

Hausübungen

22. Verwende den Satz von Korovkin. Es gelten: $B_n \mathbf{1} = \mathbf{1}$, $B_n \,\mathrm{id} = \mathrm{id}$ und $B_n \,\mathrm{id}^2 = \mathrm{id}\, \frac{1+(-1+n)\,\mathrm{id}}{n} \to \mathrm{id}^2$ (dass muss man natürlich durch kurzes Rechnen nachweisen).

23. Sei $x \in \ell^\infty$ und nehme an, dass die Bedingung über a_{ij} erfüllt ist. Daher ist die Reihe in der Definition von T zunächst konvergent. Es ist leicht die Linearität von T zu zeigen. Ferner gilt:

$$|(Tx)_i| \leq \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}||x_j| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}| \leq M\|x\|.$$

Daher ist T stetig.

Nehme an die Stetigkeit von T. Der Operator T ist insbesondere für den folgenden Vektor $x_i \in \ell^\infty$ definiert:

$$x_i(j) := \begin{cases} \frac{|a_{ij}|}{a_{ij}} & a_{ij} \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

So gilt $\|x_i\|_\infty = 1$. Die Stetigkeit von T liefert:

$$\sum_{j=1}^\infty |a_{ij}| = \sum_{j=1}^\infty a_{ij} x_i(j) = |(Tx_i)(i)| \leq \|Tx_i\|_\infty \leq \|T\|\|x_i\|_\infty \leq \|T\|.$$

So folgt die Behauptung.