PDGl: Funktionalanalytische Methoden
Bálint Farkas
28. Oktober 2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Übung zu Kompaktheit - Lösungsvorschlag

12.

a) Sei $x_n \in X$ eine Cauchy-Folge. Wegen Kompaktheit besitzt sie eine konvergente Teilfolge, $x_{n_k} \to x \in X$. Eine Cauchy-Folge mit einer konvergenten Teilfolge ist selbst konvergent.

b) Sei $x_n \to x$. Für $y \in K$ gilt

$$(1) \qquad \limsup_{n\to\infty} d(x_n, K) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = d(x, y), \quad \text{und daher} \quad \limsup_{n\to\infty} d(x_n, K) \leq d(x, K).$$

Anderseits wähle $y_n \in K$, so dass $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, K) + \varepsilon$. Es gilt:

$$d(x, K) \leq d(x, y_n) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) \leq d(x, x_n) + d(x_n, K) + \varepsilon.$$

Daher

$$d(x, K) \leq d(x_n, K) + 2\varepsilon \quad \text{für } n \text{ genügend groß.}$$

Dies zeigt

$$d(x, K) \leq \liminf_{n\to\infty} d(x_n, K),$$

und somit (mit (1)) $\lim_{n\to\infty} d(x_n, K) = d(x, K)$. Bemerke, dass die Kompaktheit nicht genutzt wurde.

c) Seien U_α, $\alpha \in I$ offen mit $\{x, x_n : n \in\} \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$. So gibt es $\alpha_1 \in I$ mit $x \in U_{\alpha_1}$. Weil $x_n \to x$, nur endlich viele x_n liegen außerhalb U_{α_1}, diese Punkte kann man mit endlich vielen U_α überdecken.

d) Falls f stetig ist, die gewünschte Bedingung ist trivial erfüllt. Umgekehrt: Sei $x_n \to x$ eine konvergente Folge. Wir müssen $f(x_n) \to f(x)$ zeigen. Wäre es nicht so, würde dann eine Teilfolge x_{n_k} und $\varepsilon > 0$ existieren mit $|f(x_{n_k}) - f(x)| \geq \varepsilon$. Die konvergente Folge $x_{n_k} \to x$ besitzt aber keine Teilfolge mit der Eigenschaft $f(x_{n_k}) \to f(x)$: ein Widerspruch zu der Annahme.

13. Die Folge δ_n ($\delta_n(k) = 1$ für $n = k$ und 0 sonst) liegt in der Einheistkugel von c_0 und von ℓ^1. Es gilt $\|\delta_n - \delta_m\| \geq 1$ in beiden Fällen ($n \neq m$). Also die Folge δ_n besitzt keine konvergente Teilfolge, d.h. die Einheitskugel ist nicht (folgen)-kompakt.

14. Verwende den Satz von Arzelà-Ascoli. Für $f \in C^1$ mit $\|f\|_{C^1} \leq 1$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_x^y |f'(t)| \,\mathrm{d}t \leq \|f\|_{C^1} |x - y| \leq |x - y|.$$

Dies zeigt, dass die Funktionen $f \in B_{C^1}(0, 1)$ gleichgradig stetig sind.

15. Falls $f(a) = a$ oder $f(b) = b$ gilt, sind wir fertig. Sonst betrachte die stetige Funktion $g(x) = f(x) - x$, welche $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$ erfüllt. Also existiert wegen Stetigkeit ein $x_0 \in [a, b]$ mit $g(x_0) = 0$.

Hausübungen

16. Wiederhole den Beweis des Arzelà-Ascoli-Satzes. Alternativ: Betrachte $K := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{N}$, die ein kompakter, metrischer Raum ist. Jede Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ ist eine stetige Funktion auf $\mathbb{N}$ (versehen mit der diskreten Topologie (oder Metrik)). Die Nullfolgen $a \in c_0$ haben stetige Fortsetzungen auf K gegeben durch $a(\infty) = 0$. Identifiziere also $\mathcal{A}$ mit einer Teilmenge von $C(K)$, und wende den Satz von Arzelà-Ascoli an.

17. Sei $x_n + y_n \in L + K$ mit $x_n \in L$, $y_n \in K$, $x_n + y_n \to z$. Es ist $z \in L + K$ zu zeigen. Da K kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $y_{n_k} \to y \in K$. Somit gilt $x_{n_k} \to z - y$ und $z - y \in L$ (L abgeschlossen). Dies zeigt $z \in L + K$. Ist zusätzlich L kompakt, so ist $L \times K$ auch kompakt, und da $+ : X \times X \to X$ stetig ist, folgt, dass $L + K = +(L \times K)$ als stetiges Bild

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

einer kompakten Menge, kompakt ist. Alternativ: argumentiere mit Folgen: finde konvergente Teilfolgen in K und L.

18.

a) Sei $x_n \in K$ so, dass $f(x_n) \leq \inf_K f + 1/n$. Wegen der Kompaktheit finden wir eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}), die etwa gegen $x \in K$ konvergiert. Dann gilt $\inf_K f = \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$, also $f(x) = \inf_K f$.

b) Sei $x_n \to x$. Es gilt $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq \liminf_{n\to\infty} g(x_n)$. Daraus folgt auch $g(x) \leq \liminf_{n\to\infty} g(x_n)$.