TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Übung zu Banachräumen – Lösungsvorschlag

6.

a) Die Eigenschaften einer Norm sind einfach zu überprüfen. Verwende dafür, dass $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ ein normierter Vektorraum ist ($1 \leq p \leq \infty$).
b) Verwende: auf einem endlich-dimensionalen Raum sind alle Normen äquivalent.
c) Falls $((x_n, y_n)) \subseteq X \times Y$ eine Cauchy-Folge ist, sind $(x_n) \subseteq X$ und $(y_n) \subseteq Y$ auch Cauchy-Folgen. Nach Voraussetzung konvergieren sie auch gegen ein x bzw. y. Dann konvergiert aber (x_n, y_n) gegen (x, y).
d) Sind $D_1 \subseteq X$ und $D_2 \subseteq Y$ dichte und abzählbare Teilmengen, so ist $D_1 \times D_2$ dicht in $X \times Y$ und auch abzählbar. Umgekehrt sei $D \subseteq X \times Y$ dicht und abzählbar. Definiere $D_1 := \{x \in X : \exists y \in Y \text{ mit } (x, y) \in D\}$. So ist D_1 dicht in X und abzählbar.

7. Definiere $Jf = (f, f')$, $J : C^1([0,1]) \to C([0,1]) \times C([0,1])$. So ist natürlich J ein isometrischer Isomorphismus. Zu zeigen ist noch die Abgeschlossenheit von Bild J. Wir bentötigen den folgenden Fakt:

$$f(x) - f(y) = \int_x^y f'(z)\,\mathrm{d}z, \qquad \text{für } f \in C^1([0,1]). \tag{1}$$

Sei jetzt $(f_n, f_n') \in \operatorname{Bild} J$ eine konvergente Folge: $(f_n, f_n') \to (f, g)$. So folgern wir aus der obigen Gleichung:

$$f(x) - f(y) \leftarrow f_n(x) - f_n(y) = \int_x^y f_n'(z)\,\mathrm{d}z \to \int_x^y g(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dies zeigt $f \in C^1([0,1])$ mit $f' = g$, d.h., $(f, g) \in \operatorname{Bild} J$.
$|||\cdot|||_1$ ist eine Norm: Dreicksungleichung und Homogenität sind klar. Falls $|||f|||_1 = 0$, so ist $f(0) = 0 = f'$ und daher $f = f(0) = 0$ konstant.
$|||\cdot|||_2$ ist eine Norm: Dreicksungleichung und Homogenität sind klar. Falls $|||f|||_2 = 0$, so ist $\int f = 0 = f'$ und daher $f = \int f = 0$ konstant.
$|||\cdot|||_3$ ist eine Norm: wie für $|||\cdot|||_2$.

Äquivalenz der Norme: Wir verwenden (1): Es gilt:

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'| \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty \quad \text{und daher} \quad \|f\|_{C^1} \leq 2|||f|||_1 \leq 2\|f\|_{C^1},$$

also $\|\cdot\|_{C^1}$ und $|||\cdot|||_1$ sind equivalent. Ferner:

$$|||f|||_2 \leq \int_0^1 |f| + \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{C^1} \quad \text{und} \quad f(x) = \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 f', \quad \text{und daher} \quad \|f\|_\infty \leq 2|||f|||_2$$

also $\|\cdot\|_{C^1}$ und $|||\cdot|||_2$ sind equivalent.

Die Norm $|||\cdot|||_3$ ist nicht äquivalent zu den anderen, weil $C^1([0,1])$ versehen mit dieser Norm nicht vollständig ist.

8. $X = c_0$, ℓ^p: Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wir zerlegen $x = x_N + y_N$, wobei $x_N(i) = x(i)$ für $i \leq N$ und $x_N(i) = 0$ für $i > N$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass für $\|y_N\| < \varepsilon$. Wir haben $x_N \in c_{00}$ und dadurch finden wir $z_N \in c_{00} \cap \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ mit $\|x_N - z_N\| \leq \varepsilon$. Zusammenfassend $\|x - z_N\| \leq \|x - x_N\| + \|x_N - z_N\| \leq 2\varepsilon$. Dies zeigt, dass die abzählbare Menge $c_{00} \cap \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ in X dicht ist.
$X = c$: Sei $x \in c$ mit $a = \lim x_n$. So zerlegen wir $x = x - a\mathbf{1} + a\mathbf{1}$, wobei $\mathbf{1}$ die Konstante-1-Folge ist. Es gilt $x - a\mathbf{1} \in c_0$ also wir können den obigen Fall verwenden. Dies zeigt, dass $(c_{00} \cap \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}) + \mathbb{Q}\mathbf{1}$ eine dichte Teilmenge, und natürlich abzählbar, ist.

9. a $\Rightarrow$ b): Ist $D \subset X$ eine dichte und abzählbare Teilmenge in X, so ist $D \cap B(0,1)$ dicht in $B(0,1)$ und natürlich abzählbar.
b $\Rightarrow$ c): Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass in einem separablen metrischen Raum alle Teilmengen separabel sind (dies könnte man auch für "a $\Rightarrow$ b)" benutzen).
c $\Rightarrow$ a): Sei D ein dichte abzählbare Teilmenge in $S(0,1)$ und $x \in X$ beliebeig. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es gibt dann $y \in X$ mit $\|y\| \in \mathbb{Q}$, so dass $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Dies zeigt, dass $\mathbb{Q} \cdot D = \{qx : q \in \mathbb{Q}, x \in X\}$ dicht ist. Natürlich ist $\mathbb{Q} \cdot D$ auch abzählbar.

10.

a,b) Definitionen überprüfen!

c) (Wir nehmen $(\alpha, \beta) \subseteq [a, b]$ an.) Ist $f_n \in E$ mit $f_n \to f$, so konvergiert $f_n(x) \to f(x)$ für jedes $x \in [\alpha, \beta]$ und dadurch gilt $f(x) = 0$, also $f \in E$. D.h. ist abgeschlossen. Für $f \in C([a, b])$ setze $J(f + E) := f|_{[\alpha,\beta]}$. Dann ist J wohldefiniert: ist $f_1 + E = f_2 + E$, so gilt $f_1 - f_2 \in E$ und somit $f_1|_{[\alpha,\beta]} = f_1|_{[\alpha,\beta]}$. Klar: J is linear. Die Abbildung J ist injektiv: falls $J(f + E) = 0$, so gilt $f \in E$, also $f + E = 0$. J ist surjektiv: ist $g \in C([\alpha, \beta])$ so existiert $f \in C([a, b])$ mit $f|_{[\alpha,\beta]} = g$ (z.B. setze g als konstant $g(\alpha)$ bzw. $g(\beta)$ auf $[a, \alpha]$ und $[\beta, b]$ fort). Es gilt dann $J(f + E) = g$. Also J ist ein linearer Isomorphismus. J ist auch eine Isometrie: $\sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x)| = \|J(f + E)\|_\infty \leq \|f + h\|_\infty$ für jedes $f \in C([a, b])$ und $h \in E$. Daher gilt $\|J(f + E)\|_\infty \leq \|f + E\|$. Man muss noch zeigen, dass

$$\|J(f + E)\|_\infty = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x)| = \|f + E\| = \inf_{g\in E} \|f - g\|_\infty.$$

Das heißt für $\varepsilon > 0$ gibt es $g \in E$ mit $\|f - g\|_\infty \leq \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x)| + \varepsilon$. Sei $\delta > 0$ so klein, dass $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ für $|x - y| \leq \delta$ und $a < \alpha - \delta$, $\beta + \delta < b$ gelten. Setze

$$g(x) := \begin{cases} f(x) - f(\alpha) & x \in [a, \alpha - \delta] \\ 0 & x \in [\alpha, \beta] \\ f(x) - f(\beta) & x \in [\beta + \delta, b] \\ \text{linear fortgesetzt} & \text{sonst.} \end{cases}$$

So hat g die gewünschten Eigenschaften.

11. Um die Dichtheit zu zeigen verwendet man den Satz von Stone-Weierstraß. Der Raum X is separabel, denn

$$D := \lim_{\mathbb{Q}}\{h = p \cdot q : \; h(x, y) = p(x)q(y) \; p, q \text{ Polynome mit rationellen Koeffizienten}\} \subseteq X,$$

ist dicht in E und somit in X ($\lim_{\mathbb{Q}}$ bezeichnet die lineare Hülle über dem Körper $\mathbb{Q}$).