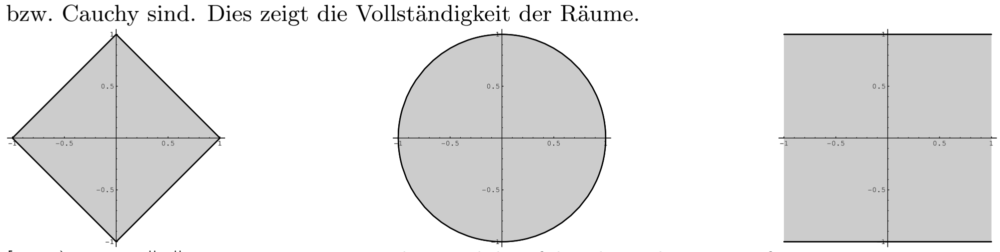
PDGl: Funktionalanalytische Methoden
Bálint Farkas
17. Oktober 2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1. Übung zu Banachräumen - Lösungsvorschlag

1.

i) Es is bekannt, dass die Funktion $\|\cdot\|_p$ eine Norm ist. **Bemerkung:** $x_k \in (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ ist genau dann eine konvergente bzw. Cauchyfolge ist, wenn Koordinatenfolgen $x^k(i)$ $(i = 1, \dots, d)$ auch konvergent bzw. Cauchy sind. Dies zeigt die Vollständigkeit der Räume.

ii) 

iii) $[1, \infty) \ni r \mapsto \|x\|_r$ ist eine stetige Funktion, daher folgt die Behauptung für $p < \infty$. Für $p = \infty$ setze $m := \max_{i=1,\dots,d} |x_i|$. Es gilt

$$m \le \Big(\sum_{i=1}^d |x_i|^r\Big)^{1/r} = m \cdot \Big(\sum_{i=1}^d \frac{|x_i|^r}{m^r}\Big)^{1/r} \le m d^{1/r} \to m.$$

iv) Seien $x, y \in \overline{B(0,1)}$ und $\lambda \in [0,1]$. So gilt

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \le \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \le 1.$$

6.

a)
- $c_0 \subsetneq \ell^\infty$: klar.
- $\ell^p \subsetneq c_0$: Falls $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konvergent ist, so folgt $x_n \to 0$. Für $x_n := \frac{1}{\log(n+2)}$ gilt $x \in c_0 \setminus \ell^p$ für alle $p \in [1, \infty)$
- Für $x_n := \frac{1}{n}$ gilt $x \in \ell^p \setminus \ell^1$ für alle $p \in (1, \infty)$.

b)
- Sei $x \ni \ell^1 \subseteq \ell^r$. Für $0 < \varepsilon < 1$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=N+1}^\infty |x_j| < \varepsilon$. Es gilt

$$\|x\|_r = \Big(\sum_{j=1}^N |x_j|^r + \sum_{j=N+1}^\infty |x_j|^r\Big)^{1/r} \le \Big(\sum_{j=1}^N |x_j|^r + \sum_{j=N+1}^\infty |x_j|\Big)^{1/r} \le \|x\|_1 + 2\varepsilon,$$

für $r - 1 < \delta$ mit δ genügend klein. Dies gilt wegen der Stetigkeit der Funktionen, die hier auftauchen. Anderseits

$$\|x\|_1 - \varepsilon \le \Big(\sum_{j=1}^N |x_j|^r\Big)^{1/r} \le \|x\|_r,$$

für $r - 1 < \delta$ mit δ genügend klein.
- Sei $x \in \ell^p$ so gilt $x \in \ell^r$ für jedes $r \ge p$. Es gilt ferner $\|x\|_\infty \le \|x\|_r$. Da $x \in c_0$, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| = \|x\|_\infty$. Sei $N > n$ so groß, dass $\sum_{j=N+1}^\infty |x_j|^r < |x_n|^r$ für jedes $r > p$ gilt. So gilt

$$\|x\|_\infty \le |x_n|\Big(\sum_{j=1}^\infty \frac{|x_j|^r}{|x_n|^r}\Big)^{1/r} \le |x_n|\Big(\sum_{j=1}^N \frac{|x_j|^r}{|x_n|^r} + 1\Big)^{1/r} \le |x_n|(N+1)^{1/r} \to |x_n| = \|x\|_\infty.$$

c) Siehe Skript.

d) Der fehlende Schritt war: der Kandidat y liegt in ℓ^1. Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gilt

$$\sum_{j=1}^N |y(j)| \le \sum_{j=1}^N |y(j) - x_k(j)| + \sum_{j=1}^N |x_k(j)| \le \sum_{j=1}^N |y(j) - x_k(j)| + M,$$

denn $\|x_k\|_1 \le M$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ (eine Cauchy-Folge ist beschränkt). Jetzt wähle k genügend groß um den ersten Term ≤ 1 zu machen. Daher $\sum_{j=1}^N |y(j)| \le 1 + M$ für jedes N, also $y \in \ell^1$.

e) Geht genau so wie für ℓ^1.

2. Einfach die Definition von Vollständigkeit hinschreiben!

3.

a) p_1 ist eine Norm auf $C([a,b])$. X ist ein Unterraum dessen, also ist auch p_1 eine Norm auf X. Betrachte eine konstante Funktion $f \ne 0$. Dann ist $f' = 0$, $p_2(f) = 0$, also kann p_2 keine Norm sein.

b) X ist bezüglich p_2 nicht abgeschlossen in $C([a,b])$, also auch kein Banachraum.

c) Offensichtlich ist p_3 eine Norm. Sei $(f_n) \subseteq (X, p_3)$ eine Cauchyfolge, d.h., dass $(f'_n) \subseteq C([a,b])$ auch eine Cauchyfolge ist. Daher $f'_n \to g$ in $C([a,b])$. Setze $h_n(x) := \int_a^x f'_n$. Dann sind h_n stetig differenzierbar mit $h'_n = f'_n$ und $f_n(x) - h_n(x) = f_n(a)$. $|h_m(x) - h_n(x)| \leq \int_a^b |f'_m - f'_n|$, also ist $(h_n) \subseteq C([a,b])$ eine Cauchyfolge, deshalb ist $(f_n) \subseteq C([a,b])$ auch eine Cauchyfolge, folglich gilt $f_n \to f$. Aus Analysis I wissen wir, dass g differenzierbar ist und $g' = f$. Dies zeigt $f_n \xrightarrow{p_3} f$.

4.

a) Welche Eigenschaften einer Norm sind, ohne dass Bedingungen an ω gestellt sind, immer erfüllt? Positivität, Homogenität und die Dreieckungleichung sind klar, d.h. p_ω ist immer eine Halbnorm. Zu Untersuchen ist, wann die Implikation „$p_\omega(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$“ gilt. Betrachte $\omega^{-1}(0)$. Ist das Innere von $\omega^{-1}(0)$ nicht leer, findet man eine positive, stetige Funktion $f \neq 0$ so, dass $f(s) = 0$ für $s \in [a,b] \setminus \omega^{-1}(0)$. Daher $|f(s)|\omega(s) = 0$ für alle $s \in [a,b]$ aber $f \neq 0$, also ist p_ω keine Norm. Umgekehrt, nehmen wir an, dass p_ω keine Norm ist. Daraus folgt die Existenz einer stetigen Funktion $f \neq 0$ mit $\omega(s)f(s) = 0$. Deshalb gilt $[a,b] \setminus f^{-1}(0) \subseteq \omega^{-1}(0)$. Dies zeigt, dass das Innere von $\omega^{-1}(0)$ nicht leer ist. Zusammenfassend: p_ω ist eine Norm genau dann, wenn $\omega^{-1}(0)$ leeres Inneres hat.

b) Nach Aufgabe a) ist p_ω eine Norm. Sei $(f_n) \subseteq C([a,b])$ eine Cauchyfolge bezüglich p_ω. Da $|f_n(s) - f_m(s)| = |\omega(s)f_n(s) - \omega(s)f_m(s)|/\omega(s) \leq p_\omega(f_n - f_m)/\varepsilon$, erhalten wir, dass (f_n) eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm ist. Deswegen konvergiert sie auch in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ gegen ein f. Aus der Beschränktheit von ω folgt $p_\omega(f_n - f) \leq \sup \omega \cdot \|f_n - f\|_\infty$, und wir erhalten die Behauptung: $p_\omega(f_n - f) \to 0$. Bemerkung: was wir eigentlich bewiesen haben, ist die Äquivalenz der zwei Normen.