§ 10 Zerlegung der Eins

10.1. Satz [Zerlegung der Eins]. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Seien ferner

$$K_i \subset \Omega_i \subset \overline{\Omega}_i \subset \Omega, \qquad i \in \mathbb{N},$$

mit $\overline{\Omega}_i$ kompakt und

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i = \Omega,$$

so, dass für alle $x \in \Omega$ existiert eine Umgebung $U(x)$, die nur endlich viele Ω_j trifft (die Überdeckung dann heißt *lokal finit*). Nehmen wir ferner an, dass $K_j \cap K_i = \emptyset$, falls $i \neq j$. Es existiert $\varphi_i \in C_c^\infty(\Omega)$, $i \in \mathbb{N}$ mit

i) $\varphi_i \geq 0$

ii) $\sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i(x) = 1$, falls $x \in \Omega$

iii) $0 \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i \leq 1$.

Außerdem gilt $\varphi_j(x) = 1$ für $x \in K_j$.

Bemerkung: Das System $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ heißt *der Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins* zu K.

Beweis. 1. Schritt: Nehmen wir an dass wir die folgende Situation haben

$$K_i \subseteq V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq U_j \subseteq \Omega_j$$

wobei $\overline{V}_j$ kompakt, $U_j \cap K_j = \emptyset$ falls $i \neq j$ und V_j, U_j sind lokal finite Überdeckungen von Ω. Wähle φ_j' nach Lemma §9 zu U_j und $\overline{V}_j$. Dann gilt $\varphi(x) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i'(x) > 0$, wobei lokal in Ω nur endlich viele Summanden von 0 verschieden sind. Setze Setze $\varphi_j(x) := \varphi_j'(x)/\varphi(x)$. Nach Konstruktion haben die φ_i die gewünschte Eigenschaften.

2. Schritt, Disjunktisierung von Ω_j und K_j: $U_j := \Omega_j \setminus \bigcup_{i\neq j} K_j$. Natürlich gilt $K_j \subseteq U_j \subseteq \Omega_j$. Wir behaupten, dass U_j offen ist. Sei $x \in U_j$ und $U(x) \subseteq \Omega_j$ eine Umgebung von x so, dass $J := \{i : \Omega_i \cap U(x)\}$ endlich ist. Für $j \neq k \in N$ existiert eine Umgebung $W_k(x) \subseteq U(x)$ von x mit $W_k(x) \cap K_k = \emptyset$. Setze $W(x) := \cap_{k\in J} W_k(x)$, die ist eine Umgebung von x mit $W(x) \subseteq U_j$ und $W(x) \cap K_i = \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, also U_j is offen. Sei jetzt $x \in \Omega$, liegt dann $x \in \Omega_j$ für ein j, dann entweder liegt es in U_j oder in K_i für ein $i \neq j$. Die Überdeckung U_j is lokal finit da Ω_j ist so.

3. Schritt, Konstruktion von V_j: Sei $V_1 := U_1$. Angenommen V_j, $j < n$ konstruiert ist mit der Eigenschaft

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} V_j \cup \bigcup_{j=n}^{\infty} U_j = \Omega,$$

sei F_n eine abgeschlossene Umgebung von ∂U_n die erfüllt

$$\partial U_n \subseteq F_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{n-1} V_j \cup \bigcup_{j=n+1}^{\infty} U_j.$$

Falls $U_n \neq 0$, können wir eine kleinere Umgebung $\partial U_n \subseteq F_n \subseteq F_n'$ finden damit $U_n \setminus F_n'$ nichtleer wird. Setze $V_n := U_n \setminus F_n'$. Dann

$$U_n \subseteq V_n \cup F_n' \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_j \cup \bigcup_{j=n+1}^{\infty} U_j.$$

Also V_j ist eine offene Überdeckung, die natürlich lokal finit bleibt. ∎

Satz [Zerlegung der Eins – Version II]: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$, mit $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann existiert $\varphi_i \in C_c^\infty(\Omega_j)$ mit

i) $\varphi_i \geq 0$

ii) $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1$, falls $x \in K$

iii) $0 \leq \sum_{i=1}^n \varphi_i \leq 1$.

Beweis. Konstruiere $V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq \Omega_j$ mit V_j offene Überdeckung von K und $\overline{V}_j$ kompakt. Dann wiederhole Schritt 1, von dem obigen Beweis. (Oder verwende Satz 10.1) ■