§ 9 L_p Räume bezüglich des Lebesgue-Maßes

Im Folgenden sei μ stets das Lebesgue-Maß und $\mathcal{M}$ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen.

9.1. Satz.

(a) Sei $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann existiert für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ das Integral

$$(f * g)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Es gilt ferner $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

(b) Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, so existiert

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^d.$$

Desweiteren gilt $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

(c) Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann existiert für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ das Integral

$$(f * g)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Es gilt ferner $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

Beweis. (a) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt mit der Verwendung des Satzes von Fubini-Tonelli:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \cdot |g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \cdot \|f\|_1\,\mathrm{d}y = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Dies impliziert alle Aussagen.

(b): Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ so erhält man nach der Hölder-Unleichung:

$$|f * g(x)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \cdot |g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Dies zeigt die Existenz von $f * g(x)$ für jedes x, und die übrigen Aussagen folgen auch.

c): Verwende z.B. den Satz von Riesz–Thorin, oder siehe unter Haudorff-Young-Ungleichung (unten). ■

Bemerkung: Man kann leicht zeigen, dass die Banachalgebra $L^1(\mathbb{R}^d)$ kein Einselement besitzt.

Satz [Hausdorff-Young-Ungleichung]: Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. So definiert $T_g f := f * g$ einen stetigen linearen Operator auf L^p mit $\|T_g\| \leq \|g\|_1$, d.h., $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1$.

Beweis. Sei $h \in L^q(\mathbb{R}^d)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nach dem Satz von Fubini und Satz 9.1(b)

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^d} h(x) \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\Big| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)h(x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \|g\|_1 \cdot \|f\|_p \cdot \|h\|_q.$$

Daraus folgt die Behauptung (siehe Korollar (c) von 8.6) (Linearität ist klar). ■

9.2. Satz. Der Raum $L^1(\mathbb{R}^d)$ versehen mit der Multiplikation $f * g$ (Faltung) ist eine kommutative Banachalgebra. D.h. $f*g = g*f$, $f*(g*h) = (f*g)*h$, $(f = \lambda g)*h = f*h+\lambda(g*h)$, und $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ gilt.

Beweis. Seien $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Man rechnet leicht nach, dass $(f+\lambda g)*h = f*f+\lambda(g*h)$, $f*(g*h) = (f*g)*h$ und $f * g = g * f$ gelten. Die Submultiplikativität der Norm wurde im Satz 9.1 (a) bewiesen. ■

9.3. Satz. Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

a) Es existiert $f * g$ und $f * g \in C(\mathbb{R}^d)$.

b) Gilt ferber $g = 0$ außerhalb einer kompakten Menge K, so ist $f * g \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Genauer:

$$\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \overline{\operatorname{supp} f + K} = \operatorname{supp} f + K.$$

Beweis. a): Sei $x_n \to x$ mit $|x_n - x| \leq 1$. Es gilt

$$|(f * g)(x_n) - (f * g)(x)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x_n - y) - f(x - y)| \cdot |g(y)| \,\mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_{x-(\operatorname{supp} f+B(0,1))} |f(x_n - y) - f(x - y)| \cdot |g(y)| \,\mathrm{d}y \leq \varepsilon \int\limits_{x-(\operatorname{supp} f+B(0,1))} |g(y)| \,\mathrm{d}y,$$

für $n \geq n_0(x)$ (dies folgt aus der gleichmässigen Stetigkeit von f auf der kompakten Menge $x - (\operatorname{supp} f + B(0, 1))$.

b): Nach Satz 9.1 $(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y) \,\mathrm{d}y$ existiert für *alle* $x \in \mathbb{R}^d$. Also

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) \,\mathrm{d}y = \int\limits_{(x-\operatorname{supp} f)\cap K} f(x - y)g(y) \,\mathrm{d}y.$$

Falls $x \notin \operatorname{supp} f + K$, gilt $(x - \operatorname{supp} f) \cap K = \emptyset$ und $(f * g)(x) = 0$. ■

9.4. Satz [Faltung und die Ableitung]. Seien $f \in C^k_c(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Dann $f * g \in C^k(\mathbb{R}^d)$, und $D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g$. Insbesondere $f \in C^\infty_c$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \implies f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Wie immer $(f * g)(x)$ existiert für alle x. Sei $e_j \in \mathbb{R}^d$ ein Standardbasisvektor, $h \in \mathbb{R}$, $|h| \leq 1$. Setze $K := \operatorname{supp} f + \overline{B}(0, 1)$, dies ist auch kompakt. Dann

$$\tfrac{1}{h}((f * g)(x + he_j) - (f * g)(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tfrac{1}{h}(f(x + he_j - y)g(y) - f(x - y))g(y) \,\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{K-x} \tfrac{1}{h}(f(x + he_j - y)g(y) - f(x - y))g(y) \,\mathrm{d}y,$$

wo das Integrand konvergiert gegen $D_j f(x - y)g(y)$ für alle y. Außerdem gilt

$$\left|\tfrac{1}{h}(f(x + he_j - y)g(y) - f(x - y))g(y)\right| \leq \|D_j f\|_\infty |g(y)|.$$

Nach dem Satz von Lebesgue bekommen wir $D_j(f * g)(x) = ((D_j f) * g)(x)$, und so die Behauptung. ■

9.5. Definition. Eine Folge $(\rho_n)_{n\geq 1}$ von Funktionen mit den Eigenschaften

i) $\rho_k \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

ii) $\rho_n \geq 0$

iii) $\operatorname{supp} \rho_k \subseteq B(0, 1/n)$

iv) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$

heißt *Mollifier.*

Beispiel: Betrachte $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq B(0,1)$, $\rho \geq 0$, $\int \rho = 1$, und definiere $\rho_n(x) := 1/n^d \rho(nx)$.

Lemma [1]: Sei $f \in C(\mathbb{R}^d)$ und $(\rho_n)_{n\geq 1}$ ein Mollifier. Dann konvergiert $\rho_n * f \to f$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^d$.

Beweis. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit $|f(x-y) - f(x)| \leq \varepsilon$ falls $|y| \leq \delta$. Also

$$(\rho_n * f)(x) - f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{B(0,1/n)} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y,$$

so für $n > 1/\delta$ gilt $|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int \rho_n = \varepsilon$ für $x \in K$. ∎

Lemma [2 – Urysohn, C^∞-Version]: Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $K \subseteq \Omega K$ kompakt. Es existiert dann $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $0 \leq \varphi 1$ und $\varphi(x) = 1$, falls $x \in K$.

Beweis. Sei $0 < 1/n < \varepsilon < \varepsilon + 1/n < \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$. Setze $U_\varepsilon := \{y \in \Omega : \operatorname{dist}(y, K) < \varepsilon\} \subseteq \Omega$ und $u\chi_{U_\varepsilon}$. Dann gilt $\varphi := \rho_n * u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{B}(0,1/n) + \overline{U}_\varepsilon \subseteq \Omega$, also $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \Omega$ ist compact. Sei $x \in K$, dann $\varphi(x) = \int_{|y|\leq 1/n} u(x-y)\rho_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_{|y|\leq 1/n} \rho_n(y)\,\mathrm{d}y = 1$. Ferner $\|\varphi\|_\infty \leq \|\rho_n\|_1 \cdot \|u\|_\infty = 1$. Da $\varphi \geq 0$ folgt auch $0 \leq \varphi \leq 1$. ∎

9.6. Satz. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C_c(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $R > 0$, so dass $\|f - \chi_{B(0,R)} f\|_p \leq \varepsilon$. Ferner existiert eine Treppenfunktion φ mit $\|\chi_{B(0,R)} f - \chi_{B(0,R)}\varphi\|_p \leq \varepsilon$ (siehe Lemma 8.5). Die Funktion $\chi_{B(0,R)}\varphi$ hat die Form $\sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $A_i \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt. Wir zeigen, dass jede einzelne χ_{A_i} durch Funktionen in $C_c(\mathbb{R}^d)$ approximierbar ist. Wähle eine beschränkte, offene Menge G und eine kompakte Menge K mit $K \subset A_i \subset G$ und $\lambda_d(G \setminus K) \leq \varepsilon$ (Existenz: Maßtheorie). Dann existiert nach Lemma von Urysohn ein $\psi \in C_c(G)$ mit $\varphi \equiv 1$ auf K. Es gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\chi_{A_i} - \psi|^p\,\mathrm{d}\lambda_d = \int\limits_G |\chi_{A_i} - \psi|^p\,\mathrm{d}\lambda_d = \int\limits_{G\setminus K} |\chi_{A_i} - \psi|^p\,\mathrm{d}\lambda_d + \underbrace{\int\limits_K |\chi_{A_i} - \psi|^p\,\mathrm{d}\lambda_d}_{=0} \leq 2^p \lambda(G \setminus K) \leq 2^p\varepsilon.$$

∎

9.7. Korollar. Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.

Beweis. Sei $f \in L^p(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ und $g \in C_c(\Omega)$ mit $\|f - g\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$. Definiere $g'(x) := g(x)$ für $x \in \Omega$ und $g'(x) = 0$ $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Dann $g' \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $\|\rho_n * g' - g'\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ nach Satz 9.8. Ferner

$$\operatorname{supp}(\rho_n * g') \subseteq \overline{B(0,1/n)} + \operatorname{supp} g' \subseteq \Omega \qquad \text{für } n \text{ geeignet groß.}$$

Setze $u_n := (\rho_n * g')|_\Omega$. Für n genügend groß gilt $u_n \in C_c(\Omega)$ undv $\|u_n - g\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Schließlich

$$\|u_n - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_n - g\|_{L^p(\Omega)} + \|g - f\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon.$$

∎

9.8. Satz. Sei $(\rho_n)_{n\geq 1}$ ein Mollifier.

a) Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|\rho_n * f - f\|_p \to 0$.

b) Sei $f \in BUC(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|\rho_n * f - f\|_\infty \to 0$

Beweis. a) Sei $\varepsilon > 0$ und $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ so, dass $\|f - g\| \leq \varepsilon$. Nach Lemma 1 gilt $\rho_n * g \to g$ gleichmässig auf jedem kompakten $K \subseteq \mathbb{R}^d$. Anderseits ergibt Satz 9.3

$$\operatorname{supp}(\rho_n * g) \subseteq \overline{B(0, 1/n)} + \operatorname{supp} g \subseteq K, \qquad \text{wobei } K \text{ kompakt.}$$

Daraus folgt $\|\rho_n * g - g\|_p \to 0$. Schließlich

$$\|\rho_n * f - f\|_p \leq \|\rho_n * (f-g)\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g - f\|_p \leq \|f - g\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g - f\|_p \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon,$$

falls n groß genug ist.

b) Wiederhole den Beweis von Lemma 1. ∎