§ 8 L_p Räume I.

In diesem Abschnitt sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ stets ein Maßraum.

8.1. Definition.

(a) Sei $1 \leq p < \infty$. Setze $\|f\|_p := \Big(\int\limits_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}$.

(b) Sei $f : X \to \mathbb{K}$ messbar. Dann heißt f *wesentlich beschränkt*, falls ein $\alpha > 0$ existiert mit $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0$. Ferner heißt

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \geq 0 : \; \mu(\{x \in X : \; |f(x)| > \alpha\} = 0)\}$$

das *wesentliche Supremum* von f.

(c) Sei $1 \leq p \leq \infty$. Definiere

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(X, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu, \mathbb{K}) := \big\{f : f : X \to \mathbb{K} \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty\big\}.$$

Satz:

(a) $\mathcal{L}^p$ ist ein Vektorraum.

(b) $\|f\|_p = 0$ gilt genau dann, wenn $f(x) = 0$ für fast alle $x \in X$, d.h., es gibt $N \in \mathcal{M}$, so dass $\mu(N) = 0$ und für alle $x \in X \setminus N$ gilt $f(x) = 0$.

(c) Sei $f \in \mathcal{L}^p$. Setze

$$\mathcal{N} := \{f : \;\; f \text{ messbar und } f = 0 \;\mu\text{-fast überall}\} = \{f : \;\; f \text{ messbar und } \|f\|_p = 0\}.$$

Dann ist $\mathcal{N}$ ein Unterraum von $\mathcal{L}^p$.

(d) μ-fast überall gilt $|f| \leq \|f\|_\infty$.

Beweis. a) Für $p = \infty$: Sei $\beta > \|f\|_\infty$ und $\gamma > \|g\|_\infty$. So gelten

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \beta\}) = 0 \quad \text{und} \quad \mu(\{x \in X : |g(x)| > \gamma\}) = 0.$$

Es gilt $\{x \in X : |f(x) + g(x)| > \alpha + \beta\} \subseteq \{x \in X : |f(x)| > \beta\} \cup \{x \in X : |g(x)| > \gamma\}$, und daher $\mu(\{x \in X : |f(x) + g(x)| > \alpha + \beta\}) = 0$. Dies zeigt $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Für $1 \leq p < \infty$: Die Funktion $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^p$ ist konvex, d.h. $\big(\frac{a+b}{2}\big)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2}$. Daraus folgt

$$\int\limits_X |f + g|^p \,\mathrm{d}\mu \leq 2^{p-1} \int\limits_X |f|^p + |g|^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \text{für } f \in \mathcal{L}^p.$$

b): Setze $N_n := \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\}$. So gelten $\mu(N_n) = 0$ und $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n) = 0$. Ferner gilt $f(x)| \leq \|f\|_\infty$ für jedes $x \in X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$.

c), d): Klar. ∎

8.2. Satz. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist auf $\mathcal{L}^p$ die Funktion $\|\cdot\|_p$ eine Halbnorm.

Beweis. Homogenität ist leicht zu sehen. Die Dreiecksungleichung für $p = \infty$ wurde im Satz §8 a) bewiesen. Für $p < \infty$ ist die Dreiecksungleichung ein Resultat von Minkowski, siehe Satz §8. Zum Beweis benötigen wir ein paar Hilfssätze. ∎

Satz [Youngsche Ungleichung]: Für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und für $a, b \geq 0$ gilt

$$ab \leq \tfrac{a^p}{p} + \tfrac{b^q}{q}.$$

Beweis. Es reicht $\log(ab) \leq \log\big(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\big)$ zu zeigen, welche Ungleichung sich als $\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q \leq \log\big(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\big)$ schreiben lässt. Diese Ungleichung bedeutet aber die Konkavität von log, was aber natürlich stimmt. ∎

Satz [Höldersche Ungleichung]: Es sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ (interpretiere $1/\infty = 0$). Desweiteren seien $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(X, \mu)$. Dann ist $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Beweis. Die Fälle $p = 1, \infty$ sind trivial, sowie der Fall $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_p = 0$. Natürlich ist fg messbar. Seien $G := g/\|g\|_q$ und $F := f/\|f\|_p$. Anwendung der Youngsche Ungleichung in jedem Punkt $x \in X$ ergibt nach Integration

$$\int_X |F(x)G(x)|\, \mathrm{d}\mu(x) \leq \int_X \frac{|F(x)|^p}{p}\, \mathrm{d}\mu(x) + \int_X \frac{|G(x)|^q}{q}\, \mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und die Behauptung folgt. ∎

Satz [Minkowskische Ungleichung]: Sei $1 \leq p < \infty$ und $f, g \in L^p(X, \mu)$. Dann gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beweis. Bemerke $pq - q = p$ und verwende die Höldersche Ungleichung:

$$\begin{aligned}\int_X |f+g|^p\, \mathrm{d}\mu &\leq \int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1}\, \mathrm{d}\mu + \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1}\, \mathrm{d}\mu \leq \\ &\leq \Big(\int_X |f|^p\, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} \cdot \Big(\int_X |f+g|^{pq-q}\, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/q} + \Big(\int_X |g|^p\, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} \cdot \Big(\int_X |f+g|^{pq-q}\, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/q} = \\ &= \left(\Big(\int_X |f|^p\, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int_X |g|^p\, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}\right) \cdot \Big(\int_X |f+g|^p\, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/q},\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nach Division mit dem rechten Term und $p - p/q = 1$. ∎

Bemerkung:

(a) $\|\cdot\|_p$ ist nur eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$. Denn sei $f \in \mathcal{L}^p$, es gilt $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn

$$f \in \mathcal{N} := \{g : \ g \text{ messbar und } g = 0\ \mu\text{-fast überall}\}.$$

(b) $\mathcal{N}$ ist ein Unterraum von $\mathcal{M}$, dem Vektorraum der messbaren Funktionen (auch von $\mathcal{L}^p$), und

$$f \sim g \quad \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \quad f - g \in \mathcal{N}$$

definiert eine Äquivalenzrelation.

Wir können äquivalente Funktionen miteinander identifizieren, d.h. den Faktorraum definieren.

8.3. Definition. Der Raum L^p ist definiert durch:

$$L^p(X,\mu) := \mathcal{L}(X,\mathcal{M},\mu,\mathbb{K})/\mathcal{N}, \qquad \|[f]\|_p := \|f\|_p, \qquad \text{für alle } [f] \in L^\infty, \text{ die Äquivalenzklasse von } f.$$

8.4. Satz.

a) $L^\infty(X,\mu)$ ist ein Banachraum, und $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ genau dann, wenn eine Menge $N \in \mathcal{M}$ mit $\mu(N) = 0$ existiert, so dass $f_n(x) \to f(x)$ gleichmäßig auf $X \setminus N$.

b) **[Riesz-Fischer]**: Sei $1 \le p < \infty$. Dann ist $L^p(X,\mu)$ vollständig.

Beweis. a) ÜA.

b) Sei $f_n \in L^p(X,\mu)$ mit $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p = M < \infty$. Nach Satz 1.5 genügt es zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^\infty f_j$ in L^p konvergiert. Setze $G_n := \sum_{j=1}^n |f_j|$ und $G := \sum_{j=1}^\infty |f_j|$. Dann $\|G_n\|_p \le \sum_{j=1}^n \|f_j\|_p \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Satz von monotoner Konvergenz ergibt

$$\int_X G^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X G_n^p \,\mathrm{d}\mu \le M^p.$$

Das heißt $G \in L^p(X,\mu)$ und $G(x) = \sum_{j=1}^\infty |f_j(x)| < \infty$ μ-fast überall, insbesondere konvergiert $F(x) := \sum_{j=1}^\infty f_j(x)$ für fast alle $x \in X$. Dann $|F| \le G$, daher $F \in L^p(X,\mu)$. Ferner

$$\Big|F - \sum_{j=1}^n f_j\Big|^p \le (2G)^p \in L^1(X,\mu),$$

nach Satz von Lebesgue

$$\Big\|F - \sum_{j=1}^n f_j\Big\|_p^p = \int_X \Big|F - \sum_{j=1}^n f_j\Big|^p \,\mathrm{d}\mu \to 0$$

■

Satz: Sei $f_n \in L^p(X,\mu)$ eine konvergente Folge mit $\|f_n - f\|_p \to 0$. Dann existiert eine Teilfolge f_{n_k}, so dass $f_{n_k}(x)$ μ-fast überall gegen $f(x)$ konvergiert.

Beweis. (f_n) ist eine Cauchy-Folge, Zu $\varepsilon = 1/2^k$ wähle $n_k > n_{k-1}$ mit $\|f_n - f_m\|_p \le 1/2^k$ für alle $n, m \ge n_k$. Somit gilt $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \le 1/2^k$, und daher

$$\sum_{k=1}^\infty \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < +\infty.$$

Wie im Beweis vom Satz 8.4 b) beweist man, dass

$$\sum_{k=1}^\infty (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \quad \text{für fast alle } x \in X \text{ konvergiert.}$$

Da L^p vollständig ist, konvergiert diese Reihe auch in L^p, d.h.

$$f_{n_{m+1}}(x) - f_{n_1}(x) = \sum_{k=1}^m (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \longrightarrow g(x) \quad \text{für } m \to \infty,$$

für fast alle $x \in X$. Also $f_{n_m}(x) \to g(x) + f_{n_1}(x)$ fast überall $(m \to \infty)$. Aus dem Beweis vom Satz 8.4 b), folgt $f_{n_m} \xrightarrow{\|\cdot\|_p} g + f_{n_1}$, also $g + f_{n_1} = f$. Der Beweis ist fertig. ■

8.5. Lemma. Die Treppenfunktionen liegen dicht in $L^p(X,\mu)$ für $q \le p \le \infty$.

Beweis. Im Falle $p = \infty$ ist das Resultat aus Maßtheorie bekannt. Für $1 \le p < \infty$ und $f \in L^p(X,\mu)$, sei $n \in \mathbb{N}$ und definiere

$$A_n := \Big\{x \in X : \tfrac{1}{n} \le |f(x)| \le n\Big\}.$$

So ist $\mu(A_n) < \infty$, und für genügend großes n gilt

$$\int\limits_{X\setminus A_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Approximiere die beschränkte Funktion $\chi_{A_n} f$ gleichmäßig auf A_n durch Treppenfunktionen $\chi_{A_n} g$, also $\|\chi_{A_n} f - \chi_{A_n} g\|_\infty \le \varepsilon$. So gilt auch

$$\int\limits_X |\chi_{A_n} f - \chi g|^p \,\mathrm{d}\mu \le \mu(A_n)\varepsilon^p,$$

die Behauptung folgt damit. ∎

8.6. Satz [Dualität]. Sei $1 \le p < \infty$, und $(X, \mathcal{M}, \mu)$ σ-endlicher Maßraum. Sei $1/p + 1/q = 1$ (so genannte *konjugierte Exponenten*). Dann definiert $L^q(X,\mu) \to L^p(X,\mu)'$

$$J(g)f := \int\limits_X f \cdot g \,\mathrm{d}\mu, \qquad g \in L^q(X,\mu),\ f \in L^p(X,\mu).,$$

einen isometrischen Isomorphismus.

Beweis. J ist wohldefiniert nach der Hölderschen Ungleichung. Natürlich ist J linear. J ist isometrisch, denn sei $g \in L^q(X,\mu)$ und setze $f := \frac{\overline{g}}{|g|}\Big(\frac{|g|}{\|g\|_q}\Big)^{q/p}$. Dann

$$\|f\|_p = \int\limits_X \Big(\frac{|\overline{g}|}{|g|}\Big)^p \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \,\mathrm{d}\mu = 1$$

und $\int_X fg \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_q$. Es bleibt die Surjektivität von J zu zeigen.

1. Fall $\mu(X) < \infty$: Sei $\varphi \in L^p(X,\mu)'$. Betrachte $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{K}$, $\nu(A) := \varphi(\chi_A)$ $(\chi_A \in L^p(X,\mu))$. ν ist ein signiertes (komplexes) Maß. Ferner ist ν absolut stetig bezüglich μ, denn $A \in \mathcal{M}$ und $\mu(A) = 0$ impliziert $\chi_A = 0$ μ-fast überall, d.h. $\chi_A = 0$ in $L^p(X,\mu)$, also $\nu(A) = \varphi(\chi_A) = 0$. Satz von Radon–Nikodým ergibt $g \in L^1(X,\mu)$ mit

$$\nu(A) = \int\limits_A g \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \chi_A g \,\mathrm{d}\mu \quad \forall A \in \mathcal{M}.$$

Also wegen Linearität $\varphi(f) = \int_X fg \,\mathrm{d}\mu$ für alle Treppenfunktionenen f. Ferner $|\varphi(f)| \le C'\|f\|_\infty$. Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^\infty(X,\mu)$, so gilt $\varphi(f) = \int_X fg \,\mathrm{d}\mu$ für alle $f \in L^\infty(X,\mu)$. Wir zeigen nun $g \in L^q(X,\mu)$. Sei erst $q < \infty$. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|g(x)|^q}{g(x)} & g(x) \ne 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

f ist messbar und $|g|^q = fg = |f|^p$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{x \in M : |f(x)| \le n\}$. Dann ist $\chi_{A_n} f \in L^\infty(X,\mu)$ und

$$\int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \chi_{A_n} fg \,\mathrm{d}\mu = \varphi(\chi_{A_n} f) \le \|\varphi\|\|\chi_{A_n} f\|_p = \|\varphi\|\Big(\int\limits_{A_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} = \|\varphi\|\Big(\int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}$$

$$\Longrightarrow \quad \int\limits_{A_n} |g|^q \le \|\varphi\|^q \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Satz von Beppo Levi (monotone Konvergenz) gibt $g \in L^q(X,\mu)$.
Jetzt betrachten wir den Fall $q = \infty$. Dann $|g| \leq \|\varphi\|$, denn sei $A := \{x \in X : |g(x)| > \|\varphi\|\}$. Setze $f := \chi_A |g|/g$, $f \in L^\infty(X,\mu)$. Nehmen wir $\mu(A) > 0$ an.

$$\mu(A)\|\varphi\| < \int_A |g| \,\mathrm{d}\mu = \int_X fg \,\mathrm{d}\mu = \varphi(f) \leq \|\varphi\| \cdot \|f\|_1,$$

und nach Annahme $\implies \mu(A) < \|f\|_1$, Widerspruch zu $\mu(A) = \|f\|_1$. Also $g \in L^\infty(X,\mu)$.

Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^p(X,\mu)$ also $\varphi = Jg$.

2. Fall, $\mu(X) = \infty$*:* Es sei $M = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$ mit $\mu(X_n) < \infty$ und M_n paarweise disjunkt. Sei $\varphi \in L^p(X,\mu)'$. Setze $\varphi_n(f) := \varphi(\chi_{M_n} f)$ für $f \in L^p(X_n,\mu_n)$, wobei $\mu_n(A) := \mu(X_n \cap A)$. Dann $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi\|$, insbesondere $\varphi_n \in L^p(X_n,\mu_n)'$. Verwende jetzt den ersten Fall um $g_n \in L^q(X_n,\mu_n)$ zu bekommen. Setze $g := \sum_{n=1}^\infty g_n$ (in jedem Punkt nur ein Summand, g_n wird durch 0 fortgesetzt auf M_n^c). Es ist $g \in L^q(X,\mu)$ und $\varphi = Jg$ zu zeigen. Sei $A_n := \bigcup_{j=1}^n M_j$ und f wie in (1)

$$\begin{aligned}\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^n \int_{M_j} fg \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \int_{M_j} \chi_{M_j} f g_j \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \varphi(\chi_{M_j} f) = \varphi\Big(\sum_{j=1}^n \chi_{M_j} f\Big) \leq \sum_{j=1}^n \|\varphi\| \|\chi_{M_j} f\|_p \\ &= \|\varphi\| \cdot \Big(\sum_{j=1}^n \int_X |\chi_{M_j} f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} = \|\varphi\| \cdot \Big(\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu \leq \|\varphi\|$, und nach dem Satz von Beppo Levi $g \in L^q(X,\mu)$. Es gilt:

$$\varphi(f) = \varphi(\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n} f) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\chi_{A_n} f) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} fg \lim_{n\to\infty} \int_M \chi_{A_n} fg \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int_M fg.$$

■

Korollar:

a) Für $1 < p < \infty$ ist L^p reflexiv.

b) L^∞ und L^1 sind im Allgemeinen nicht reflexiv.

c) Es gilt $\|f\|_p = \sup\Big\{\int_X fg \,\mathrm{d}\mu : g \in L^q(X,\mu)\Big\}$.

8.7. Theorem [Riesz–Thorin Konvexitätstheorem]. Sei

$$\begin{aligned} T &: L_1 \to L_1 \\ T &: L^\infty \to L^\infty \end{aligned}$$

linear, ferner seien $p_0, p_1, r_0, r_1 \in [1,\infty]$ mit $p_0 < p_1$ und $r_0 < r_1$. Sei $\theta \in (0,1)$ und setze

$$\tfrac{1}{p_\theta} := \tfrac{1-\theta}{p_0} + \tfrac{\theta}{p_1} \qquad \text{und} \qquad \tfrac{1}{r_\theta} := \tfrac{1-\theta}{r_0} + \tfrac{\theta}{r_1}.$$

Dann gilt

$$\|T\|_{\mathscr{L}(L^{p_\theta},L^{r_\theta})} \leq \|T\|_{\mathscr{L}(L^{p_0},L^{r_0})}^{1-\theta} \|T\|_{\mathscr{L}(L^{p_1},L^{r_1})}^{\theta}.$$

Beweis. Benutzt komplexe Analysis und ist technisch. ■