§ 6 Schwache Konvergenz

6.1. Satz. Die Abbildung

$$J : \ell^1 \to (c_0)', \quad (Jx)(y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x \in \ell^1,\ y \in c_0$$

definiert einen isometrischen Isomorphismus.

Beweis. Sei $x = (x_n) \in \ell^1$ und $y = (y_n) \in c_0$. Dann gilt

$$|J(x)(y)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \le \|y\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|y\|_\infty \|x\|_{\ell^1}.$$

Weiter ist $J(x) : c_0 \to \mathbb{K}$ natürlich linear, also $J(x) \in c_0'$. Die obige Ungleichung zeigt $\|Jx\| \le \|x\|_{\ell^1}$. Sei

$$\alpha_n^N := \begin{cases} \operatorname{sign} x_n, & n \le N, \\ 0, & n > N. \end{cases}$$

Dann gilt $\alpha^N \in c_{00}$, $\|\alpha^N\|_\infty = 1$ und

$$|J(x)(y)| = \sum_{n=1}^{m} |x_n y_n| = \sum_{n=1}^{m} |x_n|.$$

Dies zeigt $\|x\|_{\ell^1} \le \|J(x)\|$, also ist J eine Isometrie (und deswegen auch injektiv). Wir zeigen nun die Surjektivität von J. Sei $\varphi \in c_0'$. Setze $x_i := \varphi(\delta_i)$, wobei $\delta_i \in c_0$ die Folge mit 1 in der Koordinate i und Null sonst ist. Dann ist $(x_n) \subset \ell^1$, da

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n| = \sum_{n=1}^{N} x_n \alpha_n^N = \varphi(\alpha^N) \le \|\varphi\|.$$

Ferner gilt $J(x_n) = \varphi$, denn aus der Definition folgt $J(x_n)(y) = \varphi(y)$ für alle $y \in c_{00}$. Da J stetig und c_{00} dicht in c_0 ist, folgt $J(x_n)(y) = \varphi(y)$ für alle $y \in C_0$, also die Surjektivität von J. ■

Satz: Sei $y \in \ell^1$ und das Funktional $\varphi_y : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ gegeben durch

$$J : \ell^1 \to (c_0)', \quad \varphi_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x \in \ell^\infty.$$

So definiert $J(y) := \varphi_y$ eine normerhaltende lineare Abildung $J : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$, die auch injektiv ist. Wir sagen $\ell^1 \subseteq (\ell^\infty)'$.

Bemerkung: Es geben lineare Funktionale $\varphi \in (\ell^\infty)'$ die nicht im Bild von J liegen!

6.2. Satz. Sei X ein normierter Vektorraum und X' separabel. Dann ist X auch separabel.

Beweis. Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ eine dichte Menge in X'. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in X$ mit $\|x_n\| \le 1$ und $|\varphi_n(x_n)| \ge 1/2\|\varphi_n\|$. Definiere $Y := \overline{\operatorname{lin}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sei $\varphi \in X'$ mit $\varphi = 0$ auf Y. Wir zeigen nun, dass $\varphi = 0$ überall, dann folgt auch $X = Y$.

$$\|\varphi - \varphi_n\| \ge |(\varphi - \varphi_n)(x_n)| = |\varphi_n(x_n)| \ge 1/2\|\varphi_n\| \ge 1/2\|\varphi\| - 1/2\|\varphi - \varphi_n\|,$$

also $\frac{3}{2}\|\varphi - \varphi_n\| \ge \frac{1}{2}\|\varphi\|$, d.h. $\|\varphi\| = 0$, da $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ dicht in X' ist. ■

Bemerkung:

a) X separabel $\not\Longleftarrow$ X' separabel (z.B. $X = \ell^1$, $X' \simeq \ell^\infty$).

b) Ist X separabel, so existiert $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \in X'$, so dass für jedes $x \in X$

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi(x)| \quad \text{gilt.}$$

c) $c_0' \simeq \ell^1$, $(\ell^1)' \simeq \ell^\infty$ und $(\ell^\infty)' \not\simeq \ell^1$

6.3. Notation.

(a) Sei X ein normierter Vektorraum, X' der Dualraum und $X'' := (X')'$ dessen Dualraum. Dann heißt X'' der *Bidualraum* von X.

(b) Sei $x \in X$. Betrachte die Abbildung:

$$\iota_X(x) : X' \to \mathbb{K}, \quad \iota_X(x)(x') := x'(x).$$

Satz: Die Abbildung $\iota_X : X \to X''$, ist eine lineare Isometrie. (Wir schreiben manchmal nur ι, wenn es klar ist um welchen Raum X es gerade sich handelt.)

Beweis. Es ist klar, dass $\iota_X(x)$ linear ist. Ferner ist $\iota_X(x)$ stetig, denn $|x'(x)| \leq \|x'\|\|x\|$, d.h. $\|\iota_X(x)\| \leq \|x\|$ gilt. Somit ist $\iota_X(x) \in X''$. Klar ist auch, dass ι_X linear ist. Nach Korollar 5.6 folgt $\|\iota_X(x)\| = \|x\|$. ■

Bemerkung:

(a) Die Abbildung $\iota : X \to X''$ heißt *kanonische Abbildung* von X in seinen Bidualraum.

(b) Im allgemeinen ist ι nicht surjektiv. [Betrachte zum Beispiel $X = c_0$. Dann $X' \simeq \ell^1$, $X'' \simeq \ell^\infty$. Also kann ι nicht surjektiv sein, denn c_0 ist separabel und ℓ^∞ nicht.]

(c) X ein normierter Vektorraum $\Longrightarrow$ $\overline{\iota(X)}$ ist abgeschlossen in X''. Wir bekommen daher:
[Vervollständigung eines normierten Vektorraums]
Sei X ein normierter Vektorraum. Dann ist X isometrisch isomorph zu einem dichten Unterraum eines Banachraumes.

6.4. Definition. Ein Banachraum X heißt *reflexiv*, falls ι_X surjektiv ist.

Bemerkung:

a) Ein reflexiver Raum ist immer vollständig.

b) Falls X reflexiv ist, dann $X \simeq X''$. Die Umkehrung ist falsch wie gezeigt von James, 1951. D.h. $X \simeq X''$ impliziert nicht die Surjektivität von ι_X.

Satz: Sei X Banachraum.

(a) X reflexiv $\Longrightarrow$ Jeder abgeschlossene Unterraum von X ist reflexiv.

(b) X reflexiv $\Longleftrightarrow$ X' reflexiv.

(c) Ist X reflexiv und separabel, so ist X' auch separabel.

Beweis. (a) Sei $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum von X. Für $u'' \in U''$ sei $x''(x') := u''(x'|_U)$, $x' \in X'$. Dann $x'' \in X''$, denn $|u''(x'|_U)| \le \|u''\|\|x'\|$. Da X reflexiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $x'(x) = u''(x'|_U)$ für alle $x' \in X'$. *Behauptung:* $x \in U$
Falls $x \notin U$, so existiert, nach Korollar 5.6, ein $x' \in X'$ mit $x'(x) = 1$ und $x'|_U = 0$. Das ist ein Widerspruch zu

$$1 = x'(x) = u''(x'|_U) = 0.$$

Also $x \in U$. Es bleibt $u''(u') = u'(u)$ für alle $u' \in U'$ zu zeigen. Sei $u' \in U'$ und $x' \in X'$ eine Fortsetzung von u' nach Hahn–Banach. Dann gilt $u''(u') = u''(x'|_U) = x'(x) = u'(x)$, d.h. $u'' = \iota_U(u)$ und U ist reflexiv.

(b) "$\Rightarrow$": zu zeigen: $\iota_{X'} : X' \to X'''$ surjektiv. Sei $x''' \in X'''$. Betrachte $x' : X \to \mathbb{K}$, $x'(x) := x'''(\iota_X(x))$. Dann $x' \in X'$. Da X reflexiv ist, folgt, dass jedes $x'' \in X''$ die Form $x'' = \iota_X(x)$ hat. Daher $x'''(x'') = x'''(\iota_X(x)) = x'(x) = (\iota_X(x))(x') = x''(x)$. D.h. $x''' = \iota_{X'}(x')$.

"$\Leftarrow$": Annahme: X' reflexiv. Dann ist nach dem obigen Beweis X'' auch reflexiv. Da X isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von X'' ist, folgt die Reflexivität von X aus Teil a).

(c) $X'' \sim X$, also ist X'' auch separabel. Somit ist X' separabel. ∎

Beispiel:

(a) c_0, c, ℓ^∞ und ℓ^1 sind nicht reflexiv.
Wir wissen, dass c_0 nicht reflexiv ist. Also sind $(c_0)' \sim \ell^1$ und $(c_0)'' \sim \ell^\infty$ auch nicht reflexiv. Wäre c reflexiv, so wäre c_0 als abgeschlossener Unterraum in c auch reflexiv.

(b) Endlichdimensionale Räume sind reflexiv.

(c) Produkte reflexiver Räume sind reflexiv.

(d) Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ ein Isomorphismus. Dann X reflexiv $\iff$ Y reflexiv.

(e) Sei $1 < p < \infty$. Dann ist ℓ^p reflexiv.

(f) Sei $1 < p < \infty$. Dann ist $L^p(M, \mu)$ reflexiv (später).

6.5. Definition. Sei X normierter Vektorraum.

(a) Eine Folge $(x_n) \subseteq X$ heißt *schwach konvergent* gegen ein $x \in X$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x) \qquad \forall \varphi \in X'.$$

(b) Eine Menge $M \subseteq X$ heißt *schwach folgenkompakt*, falls jede Folge in M eine schwach konvergente Teilfolge besitzt, deren Limes in M liegt.

Bemerkung:

(a) Da X' die Punkte von X trennt, d.h. für $x \neq y \in X$ existiert ein $\varphi \in X'$ mit $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, ist der schwache Limes eindeutig bestimmt. Schreibweise:

$$x_n \xrightarrow{\sigma} x, \qquad \sigma - \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

(b) Normkonvergenz impliziert schwache Konvergenz. Die Umkehrung gilt nicht.

(c) $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ in X, dann $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$ *(schwach Unterhalbstetigkeit einer Norm)*

(d) Sei $(x_n) \subset X$ mit $x_n \xrightarrow{\sigma} x$. Dann ist (x_n) beschränkt.

Beweis. (a)-(b) Trivial.

(c) Es gilt

$$\|x\| = \sup_{\substack{\varphi \in X' \\ \|\varphi\|=1}} |\varphi(x)| = \sup_{\substack{\varphi \in X' \\ \|\varphi\|=1}} \lim_{n\to\infty} |\varphi(x_n)| \leq \sup_{\substack{\varphi \in X' \\ \|\varphi\|=1}} \liminf_{n\to\infty} \|\varphi\| \cdot \|x_n\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

(d) später. ∎

Korollar:

(a) Sei X ein normierter Vektorraum und $M \subseteq X$ konvex und abgeschlossen. Ferner sei $(x_n) \subseteq M$ eine schwach konvergente Folge, $x_n \xrightarrow{\sigma} x \in X$, d.h. für jedes $\varphi \in X'$ gilt $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. Dann liegt x in M. (Die Menge M heißt *schwach folgenabgeschlossen.*)

(b) **[Lemma von Mazur]**
Sei (x_n) eine schwach konvergente Folge in einem normierten Vektorraum, $x_n \xrightarrow{\sigma} x$. Dann gilt $x \in \overline{\text{conv}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. a) Verwende den Trennungssatz, falls $x \notin M$ wäre.
b) Folgt aus a). ∎

6.6. Satz. Es sei X reflexiv. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_X(0,1)} \subseteq X$ schwach folgenkompakt.

Beweis. Sei $x_n \in \overline{B_X(0,1)}$ eine Folge. Betrachte $Y := \overline{\text{lin}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist Y separabel und auch reflexiv nach Satz §6. Für jedes $\varphi \in Y'$ ist $\varphi(x_n)$ beschränkt in $\mathbb{K}$. Daraus folgt, dass $\varphi(x_n)$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge in Y'. Dann hat $\varphi_1(x_n)$ eine konvergente Teilfolge $\varphi_1(x_n^1)$. Durch Induktion erhalten wir eine Folge (x_n^k), so dass $(x_n^k) \subset (x_n^{k-1})$ und $\varphi_k(x_n^k)$ für $n \to \infty$ gegen α_k konvergiert. Dann konvergiert $\varphi_k(x_n^n)$ gegen α_k.
Beh.: $\varphi(x_n^n)$ konvergiert für *alle* $\varphi \in Y'$.
Da $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ dicht in Y' ist, existiert für $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|\varphi - \varphi_k\| \leq \varepsilon$. Wähle nun $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|\varphi_k(x_n^n) - \varphi_k(x_m^m)| \leq \varepsilon, \quad n, m \geq n_0.$$

Dann gilt:

$$|\varphi(x_n^n) - \varphi(x_m^m)| = |\varphi(x_n^n) - \varphi_k(x_n^n)| + |\varphi_k(x_n^n) - \varphi_k(x_m^m)| + |\varphi_k(x_m^m) - \varphi(x_m^m)| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon,$$

Also konvergiert $\varphi(x_n^n)$. Wir bezeichnen den Limes mit $\alpha(\varphi)$. Dann gilt $\alpha \in Y'' = Y$, denn die Linearität ist trivial und $|\varphi(x_n^n)| \leq \|\varphi\|\|x_n^n\| \leq \|\varphi\|$.
Es bleibt zu zeigen, dass $\varphi(x_n^n)$ für alle $\varphi \in X'$ konvergiert, was aus $\varphi(x_n) = \varphi|_Y(x_n)$ folgt. ∎

Korollar: Sei X reflexiver Banachraum und $(x_n) \subseteq X$ beschränkte Folge. Dann besitzt (x_n) eine schwach konvergente Teilfolge.