

## § 5 Lineare Funktionale – Hahn–Banach Theorem

**5.1. DEFINITION.** Sei  $X$  ein Vektorraum.

- (a) Ein (linearer) Operator  $T : X \rightarrow \mathbb{K}$  heißt (lineares) *Funktional*.  
(b) Ist  $X$  normiert, so heißt der Raum  $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$  aller stetigen Funktionalen auf  $X$  der *Dualraum* von  $X$  und wird mit  $X'$  bezeichnet. Der Raum  $X'$  versehen mit

$$\|x'\| := \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)|$$

ist ein Banachraum.

**Satz:** Sei  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineares Funktional,  $\varphi \neq 0$ . Dann gelten die folgende Aussagen:

- a)  $\ker \varphi$  1-kodimensional  
b) Ist  $\varphi$  stetig, so ist  $\ker \varphi$  abgeschlossen.  
c) Ist  $\varphi$  unstetig, so ist  $\ker \varphi$  dicht in  $X$ .  
d)  $\varphi \in X'$  genau dann, wenn  $\ker \varphi$  abgeschlossen ist.

**Beweis.** (a): Sei  $x \in X$ . Es gibt  $y \in X$  mit  $\varphi(y) = 1$ , da  $\varphi$  nicht 0 ist. Daher gilt  $x = \underbrace{(x - \varphi(x)y)}_{\in \ker \varphi} + \varphi(x)y$ .

Dies zeigt  $X = \ker \varphi + \text{lin}\{y\}$ .

(b):  $\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$  und  $\{0\}$  ist in  $\mathbb{K}$  abgeschlossen.

(c): Da  $\varphi$  unstetig ist, gibt es  $x_n \in X$  mit  $x_n \rightarrow 0$  und  $\varphi(x_n) = 1$ . Sei  $x \in X$  beliebig. Setze  $y_n = x - \varphi(x)x_n$ . Dann konvergiert  $y_n$  gegen  $x$  und gilt  $y_n \in \ker \varphi$ .

(d): Folgt aus (b) und (c). ■

**Bemerkung:** Die Existenz von *nichttrivialen* Funktionalen (d.h. nicht 0) ist nicht trivial!

Motivation:

1. Momentprobleme.
2. Prinzip: Untersuche Eigenschaften von Banachraum  $X$  via Eigenschaften von  $X'$ .

### 5.2. Hausdorff Momentenproblem

Gegeben  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \geq 0$ , finde (positives) Borel Maß  $\mu$  auf  $[0, 1]$  mit

$$\int x^n d\mu(x) = a_n.$$

Verallgemeinerung:

**Problem [Allgemeines Momentenproblem]:**

Sei  $X$  normierter Vektorraum und seien  $x_n \in X$  linear unabhängig und  $a_n \in \mathbb{K}$  gegeben. Finde  $\varphi \in X'$  mit  $\varphi(x_n) = a_n$ .

*Idee:* Definiere  $\varphi'(x_n) := a_n$  auf  $\text{lin}\{x_1, x_2, \dots\}$  und setze  $\varphi'$  fort.

**5.3. THEOREM [Hahn–Banach, algebraische Version].**

Sei  $X$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ,  $Y$  Unterraum von  $X$  und  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung, die

$$(a) \quad p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \alpha \geq 0, \quad x \in X, \quad (\text{positiv homogen})$$

$$(b) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in X, \quad (\text{subadditiv})$$

erfüllt. Sei ferner  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  linear mit  $f(x) \leq p(x)$  für alle  $x \in Y$ . Dann existiert eine lineare Abbildung  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(x) = f(x)$  für alle  $x \in Y$  und  $F(x) \leq p(x)$  für alle  $x \in X$ .

**Lemma [Zorn]:** Sei  $(\mathcal{M}, \leq)$  eine partiell geordnete Menge, so dass jede total geordnete Teilmenge  $\mathcal{N}$  eine obere Schranke besitzt. Dann besitzt  $\mathcal{M}$  ein maximales Element in  $\mathcal{M}$ .

**Beweis vom Theorem 5.3.** Betrachte

$$\mathcal{M} := \{(Z, g) : Y \subseteq Z \subseteq X \text{ Unterraum, } g : Z \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear, } g = f \text{ auf } Y, g \leq p \text{ auf } Z\}.$$

Sei  $(Z, g) \in \mathcal{M}$ ,  $Z \neq X$  und  $x_0 \in X \setminus Z$ . Setze  $Z_0 := \text{lin}\{Z, x_0\}$  und  $g_0(z + \alpha x_0) := g(z) + c\alpha$ , wobei  $c$  noch so zu bestimmen ist, dass  $(Z_0, g_0) \in \mathcal{M}$  gilt. Es ist nur zu zeigen, dass  $g_0 \leq p$  auf  $Z_0$  für ein  $c$  gilt, d.h.  $g(z) + c\alpha \leq p(z + \alpha x_0)$  für alle  $z \in Z$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Der Fall  $\alpha = 0$  ist trivial, also nehmen wir  $\alpha \neq 0$  an. Die Konstante  $c$  muss folgendes erfüllen:

$$c \leq \frac{p(z + \alpha x_0) - g(z)}{\alpha} = p(z/\alpha + x_0) - g(z/\alpha), \quad \text{falls } \alpha > 0$$

$$c \geq \frac{p(z + \alpha x_0) - g(z)}{\alpha} = g(-z/\alpha) - p(-z/\alpha - x_0), \quad \text{falls } \alpha < 0.$$

Es ist also  $c$  zu finden mit

$$\sup_{z \in Z} (g(z) - p(z - x_0)) \leq c \leq \inf_{z' \in Z} (p(z' + x_0) - g(z')).$$

Dies ist möglich, da für alle  $z, z' \in Z$

$$g(z') + g(z) = g(z' + z) \leq p(z' + z) = p(z' - x_0 + x_0 + z) \leq p(z' - x_0) + p(x_0 + z) \text{ gilt.}$$

Das heißt, wir können jedes  $(Z, g) \in \mathcal{M}$ ,  $Z \neq X$  fortsetzen. Die Menge  $\mathcal{M}$  ist geordnet durch die Relation  $(Z', g') \leq (Z, g)$  falls  $Z' \subseteq Z$  und  $g' = g$  auf  $Z'$ . Für ein maximales Element  $(Z, g)$  muss  $Z = X$  gelten. Sei  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$  total geordnet. Setze  $Z' = \bigcup_{(Z, g) \in \mathcal{N}} Z$  und  $g'(x) = g(x)$  falls  $x \in Z$  und  $(Z, g) \in \mathcal{N}$ . Die Abbildung  $g'$  ist wohldefiniert und  $(Z', g') \in \mathcal{M}$  ist eine obere Schranke von  $\mathcal{N}$ . Die Anwendung des Zornschen Lemmas vollendet den Beweis. ■

**Bemerkung:** Parameter  $c$  ist nicht eindeutig, also ist  $F$  auch nicht eindeutig.

**5.4. LEMMA.** Sei  $X$  ein komplexer Vektorraum.

a) Sei  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$  linear und setze  $\varphi_{re}(x) := \text{Re } \varphi(x)$ . Dann ist  $\varphi_{re}$  ein  $\mathbb{R}$ -lineares Funktional, für die  $\varphi(x) = \varphi_{re}(x) - i\varphi_{re}(ix)$  für alle  $x \in X$  gilt .

b) Ist  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  ein  $\mathbb{R}$ -lineares Funktional, so definiert  $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x) - i\varphi(ix)$  ein  $\mathbb{C}$ -lineares Funktional.

c) Sei  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Halbnorm. Dann gilt

$$\left( |\varphi(x)| \leq p(x) \quad \text{für jedes } x \in X \right) \iff \left( |\varphi_{re}(x)| \leq p(x) \quad \text{für jedes } x \in X \right)$$

d) Es gilt  $\|\varphi\| = \|\varphi_{re}\|$ .

**Beweis.** a), b) Rechnen.

c) Es gilt  $|\varphi_{re}(x)| \leq |\varphi(x)|$ ; und somit gilt “ $\Rightarrow$ ”. Sei  $x \in X$  und sei  $\varphi(x) = r\lambda$ , wobei  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $|\lambda| = 1$ ,  $r \geq 0$ . Es gilt

$$|\varphi(x)| = r = \operatorname{Re}(\bar{\lambda}\varphi(x)) = \operatorname{Re} \varphi(\bar{\lambda}x) = \varphi_{re}(\bar{\lambda}x) \leq p(\bar{\lambda}x) = p(x).$$

d) klar aus c) ■

**5.5. SATZ [Hahn–Banach, Fortsetzungsversion].** Sei  $X$  ein normierter Vektorraum über  $\mathbb{K}$ ,  $Y$  Unterraum. Dann existiert zu jedem stetigen Funktional  $y' \in Y'$  ein stetiges Funktional  $x' \in X'$  mit

$$x' = y' \text{ auf } Y \text{ und } \|x'\|_{X'} \leq \|y'\|_{Y'}.$$

**Beweis.** *Der Fall*  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ : Setze  $p(x) := \|y'\|_{Y'} \|x\|_X$  für  $x \in X$ . Dann gilt  $p(y) \geq y'(y)$  für jedes  $y \in Y$ . Nach dem algebraischen Hahn–Banach Theorem existiert ein Funktional  $x' : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x' \leq p$  und  $x' = y'$  auf  $Y$ . Daraus folgt  $\|x'\| = \|y'\|$  (und somit ist  $x'$  auch stetig).

*Der Fall*  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ : Folgt aus Lemma 5.4. ■

**5.6. KOROLLAR.** Sei  $X$  normierter Vektorraum.

- (a)  $x \in X \implies$  es existiert  $\varphi \in X'$  mit  $\|\varphi\| = 1$  und  $\varphi(x) = \|x\|$ .
- (b)  $\|x\| = \sup_{\substack{\varphi \in X' \\ \|\varphi\| < 1}} |\varphi(x)|$  für alle  $x \in X$ .
- (c) Sei  $Y$  ein abgeschlossener Unterraum von  $X$ ;  $x \in X \setminus Y \implies$  es existiert  $\varphi \in X'$  mit  $\varphi|_Y = 0$  und  $\varphi(x) \neq 0$ .
- (d) Sei  $Y \subseteq X$  Unterraum. Dann ist  $Y$  dicht in  $X \iff$  Für  $\varphi \in X'$  mit  $\varphi|_Y = 0$  gilt  $\varphi = 0$ .

**Beweis.** (a) Setze  $Y = \operatorname{lin}\{x\}$ ,  $y'(\lambda x) = \lambda\|x\|$  und wende Satz 5.5 an.

(b) Folgt aus (a).

(c) Sei  $q : X \rightarrow X/Y$  die Quotientenabbildung, dann gilt  $q(y) = 0$  für  $y \in Y$  und  $q(x) \neq 0$ . Nach (b) existiert  $\Psi \in (X/Y)'$  mit  $\Psi(q(x)) \neq 0$ . Setze  $\varphi = \Psi \circ q$ .

(d)  $\Leftarrow$ : Folgt aus (c).

$\Rightarrow$ : Sei  $\varphi \in X'$  mit  $\varphi|_Y = 0$ . Dann ist  $\ker \varphi$  dicht und abgeschlossen (denn  $\varphi$  stetig) in  $X$ , also  $\varphi = 0$ . ■

**5.7. SATZ [Helly].** Sei  $X$  normierter Vektorraum,  $x_n \in X$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $a_n \in \mathbb{K}$ . Es existiert  $\varphi \in X'$  mit  $\varphi(x_n) = a_n$  genau dann, wenn

$$(1) \quad \text{für alle } \alpha_1, \dots, \alpha_m \quad \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \right| \leq c \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right\| \quad \text{mit nur von } a_i \text{ abhängiger Konstante } c.$$

**Beweis.** *Notwendigkeit:* Sei  $\varphi \in X'$  mit den gewünschten Eigenschaften.

$$\left| \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \right| = \left| \varphi \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right) \right| \leq \|\varphi\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right\|.$$

Die Bedingung ist hinreichend: Folge der Idee vom Anfang. Setze  $Y := \text{lin}\{x_1, x_2, \dots\}$ , definiere  $\psi(x_n) := a_n$  und linear auf  $Y$ , d.h.

$$\psi\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) := \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k.$$

Wegen (1) ist  $\psi$  wohldefiniert. Dann ist  $\psi$  stetig auf  $Y$  nach Voraussetzung. Verwende Hahn-Banach. ■

### 5.8. DEFINITION UND SATZ.

- a) Eine Menge  $M \subseteq X$  heißt konvex, falls für jedes  $0 \leq \lambda \leq 1$  und  $x, y \in M$  gilt  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$ .
- b) Ist  $M$  konvex, und  $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  eine Konvexkombination von  $x_i \in M$ , d.h.,  $\lambda_i \geq 0$  und  $\sum_i \lambda_i = 1$ , dann gilt auch  $y \in M$ .
- c) Sind  $M, N$  konvex so ist  $M \cap N$  auch konvex.
- d) Für  $A \subseteq X$  heißt die Menge

$$\text{conv } A := \bigcap_{\substack{A \subseteq M \\ M \text{ konvex}}} M \quad \text{die konvexe Hülle von } A.$$

Die konvexe Hülle ist die kleinste konvexe Menge, die  $A$  enthält.

**Definition:** Es sei  $X$  ein Vektorraum und  $M \subseteq X$ . Dann heißt  $p_M : X \rightarrow [0, +\infty]$

$$p_M(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda M\}$$

das *Minkowskifunktional* (von  $M$ ). Weiter heißt  $M$  *absorbierend*, falls  $p_M(x) < +\infty$  für alle  $x \in X$ .

**Beispiel:** Sei  $X$  ein normierter Vektorraum und  $M = B_X(0, 1)$ . Dann  $p_M(x) = \|x\|$ .

**Bemerkung:** Sei  $X$  ein normierter Vektorraum,  $U \subseteq X$  konvex mit  $0 \in \text{int}(U)$ .

- (a)  $B_X(0, \varepsilon) \subseteq U$ , also  $p_U(x) \leq \frac{\|x\|}{\varepsilon}$ .
- (b)  $p_U$  ist sublinear und positiv homogen.
- (c) Ist  $U$  offen, dann gilt  $U = p_U^{-1}([0, 1))$ .

**Beweis.** (a) klar.

(b)  $p_U(\lambda x) = \lambda p_U(x)$  ( $\lambda > 0$ ) ist klar.

Zu  $x, y \in X$  und  $\varepsilon > 0$  wähle  $\lambda, \mu > 0$  mit  $x \in \lambda U$ ,  $y \in \mu U$  und  $\lambda \leq p_U(x) + \varepsilon$ ,  $\mu \leq p_U(y) + \varepsilon$ , dann gilt

$$U \ni \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{y}{\mu} = \frac{x+y}{\lambda+\mu}.$$

$$\implies p_U(x+y) \leq \lambda + \mu \leq p_U(x) + p_U(y) + 2\varepsilon.$$

(c)  $\subset$ : Sei  $0 \neq u \in U$ . Dann existiert  $B(u, \varepsilon) \subset U$ , d.h.  $(1 + \varepsilon/2\|u\|)u \in U$ . Somit folgt  $p_U(x) < 1$ .

$\supset$ : Sei  $x \in p_U^{-1}([0, 1))$  mit  $p_U(x) = \lambda < 1$ . Da  $U$  konvex ist und  $0 \in U$ , folgt aus  $x \in U$   $\lambda x \in U$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Nach Voraussetzung gilt  $x/(\lambda + \varepsilon) \in U$  mit  $\lambda + \varepsilon < 1$  und somit  $\frac{\lambda + \varepsilon}{\lambda + \varepsilon} x = x \in U$ . ■

**5.9. SATZ [Trennungssatz].** Sei  $M \subseteq X$  konvex und abgeschlossen und  $x \notin M$ . Dann existiert  $\varphi \in X'$  und  $c \in \mathbb{R}$  mit  $\operatorname{Re} \varphi(y) < c < \operatorname{Re} \varphi(x)$  für alle  $y \in M$ .

**Beweis.** Wir beweisen nur den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . O.B.d.A sei  $0 \in M$  (Sei  $m \in M$  und betrachte  $M - m$  und  $x - m$ ). Ersetze  $M$  durch  $U = \overline{M + B(0, r)}$ , wobei  $r < \operatorname{dist}(x_0, M)$ . Dann ist  $U$  auch konvex, abgeschlossen, und  $0 \in \operatorname{int}(U)$ , also  $U$  ist absorbierend. Außerdem gilt  $p_U(x) \leq 1$  für  $x \in U$  und  $p_U(x_0) > 1$ . Definiere  $f(\alpha x_0) := \alpha p(x_0)$ , ein lineares Funktional auf  $\operatorname{lin}\{x_0\}$ . Sei  $\varphi$  eine Fortsetzung von  $f$  nach dem Satz von Hahn–Banach 5.3. Dann gilt  $\varphi \leq p \leq 1$  auf  $U$  und  $\varphi(x_0) = f(x_0) = p_U(x_0) > 1$ . Da  $B(0, r) \subseteq U$  und  $\varphi(x) \leq p(x) \leq 1$ , gilt  $\varphi(x) \leq p(x) \leq \|x\|/r$ , d.h.  $\varphi \in X'$ . ■

**5.10. SATZ.** Seien  $\emptyset \neq A, B \subseteq X$  offene konvexe Mengen in einem normierten Vektorraum mit  $A \cap B = \emptyset$ . Dann existiert ein  $\varphi \in X'$  mit  $\operatorname{Re} \varphi(x) < \operatorname{Re} \varphi(y)$  für alle  $x \in A$  und  $y \in B$ .

**Beweis.** ■

**5.11. SATZ.** Seien  $\emptyset \neq A, B \subseteq X$  abgeschlossene konvexe Mengen in einem normierten Vektorraum mit  $A \cap B = \emptyset$ . Ferner sei eine der Beiden kompakt. Dann existiert ein  $\varphi \in X'$  und  $c \in \mathbb{R}$  mit  $\operatorname{Re} \varphi(x) < c < \operatorname{Re} \varphi(y)$  für alle  $x \in A$  und  $y \in B$ .

**Beweis.** ■