

§ 5 Lineare Funktionale – Hahn–Banach Theorem

5.1. DEFINITION. Sei X ein Vektorraum.

- (a) Ein (linearer) Operator $T : X \rightarrow \mathbb{K}$ heißt (lineares) *Funktional*.
(b) Ist X normiert, so heißt der Raum $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ aller stetigen Funktionalen auf X der *Dualraum* von X und wird mit X' bezeichnet. Der Raum X' versehen mit

$$\|x'\| := \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)|$$

ist ein Banachraum.

Satz: Sei $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$ lineares Funktional, $\varphi \neq 0$. Dann gelten die folgende Aussagen:

- a) $\ker \varphi$ 1-kodimensional
b) Ist φ stetig, so ist $\ker \varphi$ abgeschlossen.
c) Ist φ unstetig, so ist $\ker \varphi$ dicht in X .
d) $\varphi \in X'$ genau dann, wenn $\ker \varphi$ abgeschlossen ist.

Beweis. (a): Sei $x \in X$. Es gibt $y \in X$ mit $\varphi(y) = 1$, da φ nicht 0 ist. Daher gilt $x = \underbrace{(x - \varphi(x)y)}_{\in \ker \varphi} + \varphi(x)y$.

Dies zeigt $X = \ker \varphi + \text{lin}\{y\}$.

(b): $\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ und $\{0\}$ ist in \mathbb{K} abgeschlossen.

(c): Da φ unstetig ist, gibt es $x_n \in X$ mit $x_n \rightarrow 0$ und $\varphi(x_n) = 1$. Sei $x \in X$ beliebig. Setze $y_n = x - \varphi(x)x_n$. Dann konvergiert y_n gegen x und gilt $y_n \in \ker \varphi$.

(d): Folgt aus (b) und (c). ■

Bemerkung: Die Existenz von *nichttrivialen* Funktionalen (d.h. nicht 0) ist nicht trivial!

Motivation:

1. Momentprobleme.
2. Prinzip: Untersuche Eigenschaften von Banachraum X via Eigenschaften von X' .

5.2. Hausdorff Momentenproblem

Gegeben $a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \geq 0$, finde (positives) Borel Maß μ auf $[0, 1]$ mit

$$\int x^n d\mu(x) = a_n.$$

Verallgemeinerung:

Problem [Allgemeines Momentenproblem]:

Sei X normierter Vektorraum und seien $x_n \in X$ linear unabhängig und $a_n \in \mathbb{K}$ gegeben. Finde $\varphi \in X'$ mit $\varphi(x_n) = a_n$.

Idee: Definiere $\varphi'(x_n) := a_n$ auf $\text{lin}\{x_1, x_2, \dots\}$ und setze φ' fort.

5.3. THEOREM [Hahn–Banach, algebraische Version].

Sei X ein Vektorraum über \mathbb{R} , Y Unterraum von X und $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, die

(a) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $\alpha \geq 0$, $x \in X$, (positiv homogen)

(b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $x, y \in X$, (subadditiv)

erfüllt. Sei ferner $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ linear mit $f(x) \leq p(x)$ für alle $x \in Y$. Dann existiert eine lineare Abbildung $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) = f(x)$ für alle $x \in Y$ und $F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Lemma [Zorn]: Sei (\mathcal{M}, \leq) eine partiell geordnete Menge, so dass jede total geordnete Teilmenge \mathcal{N} eine obere Schranke besitzt. Dann besitzt \mathcal{M} ein maximales Element in \mathcal{M} .

Beweis vom Theorem 5.3. Betrachte

$$\mathcal{M} := \{(Z, g) : Y \subseteq Z \subseteq X \text{ Unterraum, } g : Z \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear, } g = f \text{ auf } Y, g \leq p \text{ auf } Z\}.$$

Sei $(Z, g) \in \mathcal{M}$, $Z \neq X$ und $x_0 \in X \setminus Z$. Setze $Z_0 := \text{lin}\{Z, x_0\}$ und $g_0(z + \alpha x_0) := g(z) + c\alpha$, wobei c noch so zu bestimmen ist, dass $(Z_0, g_0) \in \mathcal{M}$ gilt. Es ist nur zu zeigen, dass $g_0 \leq p$ auf Z_0 für ein c gilt, d.h. $g(z) + c\alpha \leq p(z + \alpha x_0)$ für alle $z \in Z$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Der Fall $\alpha = 0$ ist trivial, also nehmen wir $\alpha \neq 0$ an. Die Konstante c muss folgendes erfüllen:

$$c \leq \frac{p(z + \alpha x_0) - g(z)}{\alpha} = p(z/\alpha + x_0) - g(z/\alpha), \quad \text{falls } \alpha > 0$$

$$c \geq \frac{p(z + \alpha x_0) - g(z)}{\alpha} = g(-z/\alpha) - p(-z/\alpha - x_0), \quad \text{falls } \alpha < 0.$$

Es ist also c zu finden mit

$$\sup_{z \in Z} (g(z) - p(z - x_0)) \leq c \leq \inf_{z' \in Z} (p(z' + x_0) - g(z')).$$

Dies ist möglich, da für alle $z, z' \in Z$

$$g(z') + g(z) = g(z' + z) \leq p(z' + z) = p(z' - x_0 + x_0 + z) \leq p(z' - x_0) + p(x_0 + z) \text{ gilt.}$$

Das heißt, wir können jedes $(Z, g) \in \mathcal{M}$, $Z \neq X$ fortsetzen. Die Menge \mathcal{M} ist geordnet durch die Relation $(Z', g') \leq (Z, g)$ falls $Z' \subseteq Z$ und $g' = g$ auf Z' . Für ein maximales Element (Z, g) muss $Z = X$ gelten. Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ total geordnet. Setze $Z' = \bigcup_{(Z, g) \in \mathcal{N}} Z$ und $g'(x) = g(x)$ falls $x \in Z$ und $(Z, g) \in \mathcal{N}$. Die Abbildung g' ist wohldefiniert und $(Z', g') \in \mathcal{M}$ ist eine obere Schranke von \mathcal{N} . Die Anwendung des Zornschen Lemmas vollendet den Beweis. ■

Bemerkung: Parameter c ist nicht eindeutig, also ist F auch nicht eindeutig.

5.4. LEMMA. Sei X ein komplexer Vektorraum.

a) Sei $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ linear und setze $\varphi_{re}(x) := \text{Re } \varphi(x)$. Dann ist φ_{re} ein \mathbb{R} -lineares Funktional, für die $\varphi(x) = \varphi_{re}(x) - i\varphi_{re}(ix)$ für alle $x \in X$ gilt .

b) Ist $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein \mathbb{R} -lineares Funktional, so definiert $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x) - i\varphi(ix)$ ein \mathbb{C} -lineares Funktional.

c) Sei $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Halbnorm. Dann gilt

$$\left(|\varphi(x)| \leq p(x) \quad \text{für jedes } x \in X \right) \iff \left(|\varphi_{re}(x)| \leq p(x) \quad \text{für jedes } x \in X \right)$$

d) Es gilt $\|\varphi\| = \|\varphi_{re}\|$.

Beweis. a), b) Rechnen.

c) Es gilt $|\varphi_{re}(x)| \leq |\varphi(x)|$; und somit gilt “ \Rightarrow ”. Sei $x \in X$ und sei $\varphi(x) = r\lambda$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $|\lambda| = 1$, $r \geq 0$. Es gilt

$$|\varphi(x)| = r = \operatorname{Re}(\bar{\lambda}\varphi(x)) = \operatorname{Re} \varphi(\bar{\lambda}x) = \varphi_{re}(\bar{\lambda}x) \leq p(\bar{\lambda}x) = p(x).$$

d) klar aus c) ■

5.5. SATZ [Hahn–Banach, Fortsetzungsversion]. Sei X ein normierter Vektorraum über \mathbb{K} , Y Unterraum. Dann existiert zu jedem stetigen Funktional $y' \in Y'$ ein stetiges Funktional $x' \in X'$ mit

$$x' = y' \text{ auf } Y \text{ und } \|x'\|_{X'} \leq \|y'\|_{Y'}.$$

Beweis. *Der Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Setze $p(x) := \|y'\|_{Y'} \|x\|_X$ für $x \in X$. Dann gilt $p(y) \geq y'(y)$ für jedes $y \in Y$. Nach dem algebraischen Hahn–Banach Theorem existiert ein Funktional $x' : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x' \leq p$ und $x' = y'$ auf Y . Daraus folgt $\|x'\| = \|y'\|$ (und somit ist x' auch stetig).

Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Folgt aus Lemma 5.4. ■

5.6. KOROLLAR. Sei X normierter Vektorraum.

- (a) $x \in X \implies$ es existiert $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi(x) = \|x\|$.
- (b) $\|x\| = \sup_{\substack{\varphi \in X' \\ \|\varphi\| < 1}} |\varphi(x)|$ für alle $x \in X$.
- (c) Sei Y ein abgeschlossener Unterraum von X ; $x \in X \setminus Y \implies$ es existiert $\varphi \in X'$ mit $\varphi|_Y = 0$ und $\varphi(x) \neq 0$.
- (d) Sei $Y \subseteq X$ Unterraum. Dann ist Y dicht in $X \iff$ Für $\varphi \in X'$ mit $\varphi|_Y = 0$ gilt $\varphi = 0$.

Beweis. (a) Setze $Y = \operatorname{lin}\{x\}$, $y'(\lambda x) = \lambda\|x\|$ und wende Satz 5.5 an.

(b) Folgt aus (a).

(c) Sei $q : X \rightarrow X/Y$ die Quotientenabbildung, dann gilt $q(y) = 0$ für $y \in Y$ und $q(x) \neq 0$. Nach (b) existiert $\Psi \in (X/Y)'$ mit $\Psi(q(x)) \neq 0$. Setze $\varphi = \Psi \circ q$.

(d) \Leftarrow : Folgt aus (c).

\Rightarrow : Sei $\varphi \in X'$ mit $\varphi|_Y = 0$. Dann ist $\ker \varphi$ dicht und abgeschlossen (denn φ stetig) in X , also $\varphi = 0$. ■

5.7. SATZ [Helly]. Sei X normierter Vektorraum, $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$) und $a_n \in \mathbb{K}$. Es existiert $\varphi \in X'$ mit $\varphi(x_n) = a_n$ genau dann, wenn

$$(1) \quad \text{für alle } \alpha_1, \dots, \alpha_m \quad \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \right| \leq c \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right\| \quad \text{mit nur von } a_i \text{ abhängiger Konstante } c.$$

Beweis. *Notwendigkeit:* Sei $\varphi \in X'$ mit den gewünschten Eigenschaften.

$$\left| \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \right| = \left| \varphi \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right) \right| \leq \|\varphi\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right\|.$$

Die Bedingung ist hinreichend: Folge der Idee vom Anfang. Setze $Y := \text{lin}\{x_1, x_2, \dots\}$, definiere $\psi(x_n) := a_n$ und linear auf Y , d.h.

$$\psi\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) := \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k.$$

Wegen (1) ist ψ wohldefiniert. Dann ist ψ stetig auf Y nach Voraussetzung. Verwende Hahn-Banach. ■

5.8. DEFINITION UND SATZ.

- a) Eine Menge $M \subseteq X$ heißt konvex, falls für jedes $0 \leq \lambda \leq 1$ und $x, y \in M$ gilt $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.
- b) Ist M konvex, und $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ eine Konvexkombination von $x_i \in M$, d.h., $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_i \lambda_i = 1$, dann gilt auch $y \in M$.
- c) Sind M, N konvex so ist $M \cap N$ auch konvex.
- d) Für $A \subseteq X$ heißt die Menge

$$\text{conv } A := \bigcap_{\substack{A \subseteq M \\ M \text{ konvex}}} M \quad \text{die konvexe Hülle von } A.$$

Die konvexe Hülle ist die kleinste konvexe Menge, die A enthält.

Definition: Es sei X ein Vektorraum und $M \subseteq X$. Dann heißt $p_M : X \rightarrow [0, +\infty]$

$$p_M(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda M\}$$

das *Minkowskifunktional* (von M). Weiter heißt M *absorbierend*, falls $p_M(x) < +\infty$ für alle $x \in X$.

Beispiel: Sei X ein normierter Vektorraum und $M = B_X(0, 1)$. Dann $p_M(x) = \|x\|$.

Bemerkung: Sei X ein normierter Vektorraum, $U \subseteq X$ konvex mit $0 \in \text{int}(U)$.

- (a) $B_X(0, \varepsilon) \subseteq U$, also $p_U(x) \leq \frac{\|x\|}{\varepsilon}$.
- (b) p_U ist sublinear und positiv homogen.
- (c) Ist U offen, dann gilt $U = p_U^{-1}([0, 1))$.

Beweis. (a) klar.

- (b) $p_U(\lambda x) = \lambda p_U(x)$ ($\lambda > 0$) ist klar.

Zu $x, y \in X$ und $\varepsilon > 0$ wähle $\lambda, \mu > 0$ mit $x \in \lambda U$, $y \in \mu U$ und $\lambda \leq p_U(x) + \varepsilon$, $\mu \leq p_U(y) + \varepsilon$, dann gilt

$$U \ni \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{y}{\mu} = \frac{x+y}{\lambda+\mu}.$$

$$\implies p_U(x+y) \leq \lambda + \mu \leq p_U(x) + p_U(y) + 2\varepsilon.$$

- (c) \subset : Sei $0 \neq u \in U$. Dann existiert $B(u, \varepsilon) \subset U$, d.h. $(1 + \varepsilon/2\|u\|)u \in U$. Somit folgt $p_U(x) < 1$.

\supset : Sei $x \in p_U^{-1}([0, 1))$ mit $p_U(x) = \lambda < 1$. Da U konvex ist und $0 \in U$, folgt aus $x \in U$ $\lambda x \in U$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Nach Voraussetzung gilt $x/(\lambda + \varepsilon) \in U$ mit $\lambda + \varepsilon < 1$ und somit $\frac{\lambda + \varepsilon}{\lambda + \varepsilon} x = x \in U$. ■

5.9. SATZ [Trennungssatz]. Sei $M \subseteq X$ konvex und abgeschlossen und $x \notin M$. Dann existiert $\varphi \in X'$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} \varphi(y) < c < \operatorname{Re} \varphi(x)$ für alle $y \in M$.

Beweis. Wir beweisen nur den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. O.B.d.A sei $0 \in M$ (Sei $m \in M$ und betrachte $M - m$ und $x - m$). Ersetze M durch $U = \overline{M + B(0, r)}$, wobei $r < \operatorname{dist}(x_0, M)$. Dann ist U auch konvex, abgeschlossen, und $0 \in \operatorname{int}(U)$, also U ist absorbierend. Außerdem gilt $p_U(x) \leq 1$ für $x \in U$ und $p_U(x_0) > 1$. Definiere $f(\alpha x_0) := \alpha p(x_0)$, ein lineares Funktional auf $\operatorname{lin}\{x_0\}$. Sei φ eine Fortsetzung von f nach dem Satz von Hahn–Banach 5.3. Dann gilt $\varphi \leq p \leq 1$ auf U und $\varphi(x_0) = f(x_0) = p_U(x_0) > 1$. Da $B(0, r) \subseteq U$ und $\varphi(x) \leq p(x) \leq 1$, gilt $\varphi(x) \leq p(x) \leq \|x\|/r$, d.h. $\varphi \in X'$. ■

5.10. SATZ. Seien $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ offene konvexe Mengen in einem normierten Vektorraum mit $A \cap B = \emptyset$. Dann existiert ein $\varphi \in X'$ mit $\operatorname{Re} \varphi(x) < \operatorname{Re} \varphi(y)$ für alle $x \in A$ und $y \in B$.

Beweis. ■

5.11. SATZ. Seien $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ abgeschlossene konvexe Mengen in einem normierten Vektorraum mit $A \cap B = \emptyset$. Ferner sei eine der Beiden kompakt. Dann existiert ein $\varphi \in X'$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} \varphi(x) < c < \operatorname{Re} \varphi(y)$ für alle $x \in A$ und $y \in B$.

Beweis. ■