§ 4 Lineare Operatoren

Im Folgenden seien X, Y, Z stets normierte Räumen über dem selben Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

4.1. Definition.

(a) Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt *linear*, falls

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \qquad \forall x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

(b) Ist T linear, so heißt

$$\begin{aligned} \ker T &:= \{x \in X : Tx = 0\} \quad \text{der } \textit{Kern} \text{ von } T \\ \operatorname{im} T &:= \{y \in Y : \exists x \in X,\ y = Tx\} \quad \text{das } \textit{Bild} \text{ von } T \end{aligned}$$

(c) Lineare Abbildungen heißen (lineare) *Operatoren*.

4.2. Satz. Sei $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Äquivalent sind

(a) T ist stetig;

(b) T ist stetig in 0;

(c) T ist *beschränkt*, d.h. $\exists\, M \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq M\|x\|$ für alle $x \in X$;

(d) T ist gleichmäßig stetig.

Beweis. Die Implikationen (a) $\Rightarrow$ (b) und (d) $\Rightarrow$ (a) sind trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c): Stetigkeit heißt insbesondere, dass ein $\delta > 0$ existiert mit $TB_X(0, \delta) \subseteq B_Y(0, 1)$, also gilt $\|Tx\|_Y \leq 1$ für jedes $x \in B_X(0, \delta)$. Aus der Homogenität folgt $\|Tx\|_Y \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_X$ für alle $x \in X$.

(c) $\Rightarrow$ (d): Sei $x \in X$. Nach Voraussetzung gilt $\|Tx - Ty\|_Y \leq M\|x - y\|_X$. Ist $\|x - y\|_X \leq \varepsilon/M$, folgt $\|Tx - Ty\|_Y \leq \varepsilon$, also die gleichmäßige Stetigkeit. ∎

Definition: Sei $T : X \to Y$ beschränkt (also stetig). Setze

$$\|T\| := \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|\ \forall x \in X\}.$$

Bemerkung: Die folgende Aussagen sind aus den Definitionen leicht nachweisbar.

(a) $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$.

(b) $\|T\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$.

(c) Bezeichnung: $\mathscr{L}(X, Y) := \{T : X \to Y,\ \text{linear und stetig}\}$, $\mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X, X)$.
Mit den Operationen $(S + T)x := Sx + Tx$ und $(\alpha T)x := \alpha \cdot Tx$ ist $\mathscr{L}(X, Y)$ ein Vektorraum.

Beispiel:

(a) Ein isometrischer Isomorphismus $J : X \to Y$ ist stetig, und es gelten $\ker J = \{0\}$, $\operatorname{im} J = Y$ gelten.

(b) Sei X normierter Vektorraum, $E \subseteq X$ abgeschlossener Unterraum. Dann ist $q : X \to X/E$ stetig mit $\ker q = E$ und $\operatorname{im} q = X/E$.

(c) Falls X endlich-dimensional und $T : X \to Y$ linear ist, folgt sofort $T \in \mathscr{L}(X, Y)$.

4.3. Beispiel [Operatoren auf Räumen stetiger Funktionen].

(a) Es sei $X = C([0,1])$, $T : f \mapsto f(0)$, $T : X \to \mathbb{K}$. Dann ist T stetig mit $\|T\| = 1$.

(b) $X = C^1([0,1])$, $T : X \to \mathbb{K}$, $Tf := f(0) + f'(1)$. Dann gilt $\|T\| = 1$.

(c) $X = C^1([0,1])$, versehen mit äquivalenter Norm

$$|||f||| := \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\},$$

$T : X \to \mathbb{K}$, $Tf := f(0) + f'(1)$. Dann gilt: $\|T\| = 2$.

(d) $X = C([0,1])$, $T : X \to \mathbb{K}$

$$Tf := \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dann $\|T\| = 1$.

(e) Allgemeiner: $X = C([0,1])$, $T : X \to \mathbb{K}$, $g \in C([0,1])$

$$Tf := \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dann $\|T\| = \int_0^1 |g(t)|\,\mathrm{d}t$.

Beweis. (a) Es gilt:

$$|Tf| = |f(0)| \le \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \|T\| \le 1$$

Betrachte $f = \mathbf{1}$: $f(x) = 1$, $x \in [0,1]$, gilt $\|\mathbf{1}\| = 1 = T\mathbf{1} \Longrightarrow \|T\| = 1$.

(b) Es gilt:

$$|Tf| = |f(0) + f'(1)| \le |f(0)| + |f'(1)| \le \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_{C^1},$$

d.h $\|T\| \le 1$. Andererseits gilt $\|\mathbf{1}\|_{C^1} = 1$ und $T\mathbf{1} = 1$, also folgt $\|T\| = 1$.

(c) Es gilt

$$|Tf| = |f(0) + f'(1)| \le |f(0)| + |f'(1)| \le \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \le 2|||f|||,$$

d.h. $\|T\| \le 2$. Andererseits betrachte $f(x) := (x - 1/2)^2 + 3/4$, dann $|||f||| = 1$ und $|Tf| = 2$

(d) siehe (e)

(e) Es gilt $|Tf| = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le \|f\|_\infty \int_0^1 |g(t)\,\mathrm{d}t$. Andererseits gilt für

$$f(x) = \operatorname{sign} g(x) := \begin{cases} 1 & g(x) \ge 0 \\ -1 & g(x) < 0 \end{cases}$$

$|Tf| = \int_0^1 |g(t)|\,\mathrm{d}t$. Im Allgemeinen gilt aber $f \notin C([0,1])$, also approximiere f mit $(f_n) \subset C([0,1])$, $\|f_n\|_\infty = 1$ und $\int_0^1 |f_n - f| \to 0$ für $n \to \infty$. (Achtung: $f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\to} f$ ist nicht möglich!)

∎

4.4. Beispiel [Integraloperatoren]. Sei $I = [a, b]$ und $k : I \times I \to \mathbb{K}$ stetig. Für $f \in C(I)$ definiere

$$(Tf)(x) := \int_a^b k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in I.$$

Dann gilt $T \in \mathscr{L}(C(I))$ und $\|T\| = \sup_{x\in I} \int_a^b |k(x,y)|\,\mathrm{d}y$.
Folgerung: die Fredholmsche Integralgleichung

$$f(x) - \int_a^b k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y = g(x), \qquad x \in I$$

ist lösbar in $C(I)$, falls $g \in \mathrm{im}(Id-T)$, und es existiert höchstens eine Lösung in $C(I)$, falls $\ker(Id-T) = \{0\}$.

Beweis. Wegen der Stetigkeit existiert das Integral, es ist sogar $Tf \in C(I)$, denn

$$|(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq \int_a^b |k(x,z) - k(y,z)| \cdot |f(z)|\,\mathrm{d}z \leq \|f\|_\infty (b-a) \sup_{z\in I} |k(x,z) - k(y,z)|$$

Außerdem gilt

$$|(Tf)(x)| \leq \int_a^b |k(x,y)| \cdot |f(y)|\,\mathrm{d}z \leq \|f\|_\infty \int_a^b |k(x,y)|\,\mathrm{d}y \Longrightarrow \qquad \|T\| \leq \sup_{x\in I} \int_a^b |k(x,y)|\,\mathrm{d}y.$$

Die Gleichheit $\|T\| = \sup_{x\in I} \int_a^b |k(x,y)|\,\mathrm{d}y$ folgt wie in Bspl. 4.3(e). ■

4.5. Beispiel [Differenzialoperatoren].

(a) Sei $X = C^1([0,1])$ und

$$Tf := f'.$$

Dann

(i) $T : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht stetig.

(ii) $T : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_{C^1}) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist stetig.

(b) Im Allgemeinen: Ist $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Für jede Mutiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ setze $D_\alpha f := \frac{\partial^{\alpha_1}\ldots\partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} f$. Ferner sei $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, die Länge von α.

$$Tf := \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \cdot D_\alpha f, \qquad f \in C^k(\overline{\Omega}),\ \text{mit } a_\alpha \in C(\overline{\Omega}).$$

Dann ist T ein stetiger Operator von $C^k(\overline{\Omega})$ nach $C(\overline{\Omega})$. Wobei der Raum

$$C^k(\overline{\Omega}) := \{f : \overline{\Omega} \to \mathbb{K} : D_\alpha f \text{ exisitiert auf } \Omega \text{ und } D_\alpha f \in C(\overline{\Omega}) \text{ für jedes } |\alpha| \leq k\}$$

versehen mit $\|f\|_{C^k} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D_\alpha f\|_\infty$

ein Banachraum ist.
Spezielles Beispiel: *Laplace Operator:* $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Beweis.

(a) (i) Für $f_n(t) := t^n$ gilt $\|f_n\|_\infty = 1$, aber $\|Tf_n\|_\infty = n$.

(ii) Es gilt: $\|Tf\|_\infty \le \|f\|_{C^1}$.

(b)

$$\|Tf\|_\infty = \|\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D_\alpha f\|_\infty \le \sum_{|\alpha|\le k} \|a_\alpha\|_\infty \|D_\alpha f\|_\infty \le \sum_{|\alpha|\le k} \|a_\alpha\|_\infty \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} \le M \cdot \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})}.$$

■

4.6. Satz.

(a) $\|T\|$ ist eine Norm auf $\mathscr{L}(X,Y)$, die so genannte *Operatornorm*.

(b) Ist Y ein Banachraum, dann ist $\mathscr{L}(X,Y)$ auch ein Banachraum.

(c) Sind $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, $S \in \mathscr{L}(Y,Z)$, so gilt $ST \in \mathscr{L}(X,Z)$ und $\|ST\| \le \|S\| \cdot \|T\|$.

Beweis. (a) Die Homogenität und die Dreiecksungleichung sind klar. Sei $\|T\| = 0$. Dann $\|Tx\| \le 0\|x\|$, also $\|Tx\| = 0$ und $T = 0$.

(b) Sei $(T_n) \subseteq \mathscr{L}(X,Y)$ eine Cauchyfolge. Sei $x \in X$. Es gilt dann $\|T_n x - T_m x\| \le \|T_n - T_m\|\|x\| \le \varepsilon\|x\|$ falls $n, m \ge N$, wobei $N \in \mathbb{N}$ unabhängig von x ist. Dies zeigt, dass $(T_n x) \subseteq Y$ eine Cauchyfolge ist, also nach Voraussetzung auch konvergent gegen ein $T(x)$. Es ist leicht zu zeigen, dass $x \mapsto T(x)$ linear ist.
Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|Tx - T_m x\| \le \varepsilon\|x\| \quad \text{für alle } m \ge n_0.$$

Damit folgt $\|T - T_m\| \to 0$. Da $\|Tx\| \le \|Tx - T_m x\| + \|T_m x\| \le (1 + \|T_m\|)\|x\|$ für m groß genug, gilt $T \in \mathscr{L}(X,Y)$.

(c) Sei $x \in X$. Es gilt $\|STx\| \le \|S\| \cdot \|Tx\| \le \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$. ■

Bemerkung:

(a) $\mathscr{L}(X)$ ist eine normierte Algebra, d.h. $T, S \in \mathscr{L}(X)$ impliziert $ST \in \mathscr{L}(X)$ und $\|ST\| \le \|S\| \cdot \|T\|$ *(submultiplikative Norm)*. Ist X vollständig, dann ist $\mathscr{L}(X)$ eine Banachalgebra.

(b) Im obigen Beweis vom Satz 4.6 haben wir auch das Folgende gesehen. Ist $\|T_n - T\| \to 0$, so gilt auch $T_n \to T$ stark, d.h., $T_n x \to Tx$ für jedes $x \in X$.

(c) Die Umkehrung ist nicht wahr! Sei $X = c_0$, und $L : X \to X$ der Links-Shift: $(Lx)(n) = x_{n+1}$. Dann ist $\|L^n\| = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und $L^n \to 0$ stark.

4.7. Satz. Seien X, Y normierte Vektorräume und Y vollständig, $D \subseteq X$ ein dichter Unterraum und $T : D \to Y$ ein beschränkter linearer Operator. Dann gilt: T hat eine eindeutige stetige Fortsetzung auf X.

Beweis. Übung. ■

Konvergenz linearer Operatoren

4.8. Definition. Seien $T, T_n \in \mathscr{L}(X,Y)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) T_n konvergiert gegen T *stark*, falls $T_n x \to Tx$ für jedes $x \in X$ und für $n \to \infty$.

(b) T_n konvergiert gegen T *gleichmäßig*, falls $\|T_n - T\| \to 0$ für $n \to \infty$.

Satz: Sei X Banachraum, $T, T_n \in \mathscr{L}(X)$ mit $\|T\|, \|T_n\| \le M$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Äquivalent sind:

(a) $T_n x \to Tx$ für alle $x \in X$.

(b) $T_n x \to Tx$ für alle $x \in D$ mit $D \subseteq X$ ein dichter Unterraum.

(c) $T_n x \to Tx$ gleichmässig auf kompakten Mengen $K \subseteq X$.

Beweis. Die Implikationen (c) $\Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (b) sind trivial.
(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $x \in X$. Wir zeigen, dass $T_n x$ eine Cauchy-Folge ist:

$$\|T_n x - T_m x\| \le \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m y - T_m x\| \le \|T_n\|\|x-y\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m\|\|x-y\| \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon,$$

denn wähle $y \in D$ mit $\|x - y\| \le \varepsilon/M$, und dann n, m genügend groß (verwende die Konvergenz von $T_n y$). Dies zeigt, dass $T_n x$ konvergiert gegen ein $S(x)$. Es is leicht zu zeigen, dass $S \in \mathscr{L}(X)$. Der Operator S stimmt mit T auf D überein, also eigentlich $T = S$.

(a) $\Rightarrow$ (c): Sei $K \subseteq X$ kompakt. Für jedes $x \in K$ betrachte $B(x, \varepsilon/M)$. Wegen Kompaktheit gibt es eine endliche Überdeckung:

$$K \subseteq B(x_1, \varepsilon/M) \cup B(x_2, \varepsilon/M) \cup \cdots \cup B(x_k, \varepsilon/M).$$

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|T_n x_i - T x_i\| \le \varepsilon$ für $i = 1, \dots k$ und $n \ge n_0$. Sei $x \in K$ beliebig. Es gilt

$$\|T_n x - Tx\| \le \|T_n x - T_n x_i\| + \|T_n x_i - T x_i\| + \|T x_i - Tx\| \le M\|x - x_i\| + \varepsilon M\|x - x_i\| \le 3\varepsilon,$$

für $n \ge n_0$ und falls $\|x_i - x\| \le \varepsilon$. ■

Kriterien für starke Konvergenz sind sehr wichtig! Ein Beispiel:

4.9. Satz [Korovkin]. Seien $L_n : C[0,1] \to C[0,1]$ stetige, lineare Operatoren, die auch *positiv* sind, d.h. für $f \ge 0$ gilt $L_n f \ge 0$. Nehmen wir an, dass $L_n \mathbf{1} \to \mathbf{1}$, $L_n \mathrm{id} \to \mathrm{id}$ und $L_n \mathrm{id}^2 \to \mathrm{id}^2$ gleichmäßig auf $[0,1]$. Dann gilt $L_n f \to f$ für jedes $f \in C[0,1]$.

Beweis. Bemerke zunächst, dass $f, g \in C[0,1]$ und $f \le g$ die Ungleichung $L_n f \le L_n g$, $|L_n f| \le L_n |f|$ impliziert. Daraus folgt $\|L_n f\|_\infty \le \|f\|_\infty \|L_n \mathbf{1}\| \le M\|f\|_\infty$.
Sei $f \in C[0,1]$, dann ist f auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ so, dass $|x - y| \le \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)|$ impliziert. Für beliebiges $x, y \in [0,1]$ gilt $|f(x) - f(y)| \le 2\|f\|_\infty$. Daher können wir

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{|x-y|^2}{\delta^2}, \quad \text{oder was gleich ist,} \quad |f - f(y)| \le \varepsilon \mathbf{1} + 2\|f\|_\infty \frac{|\mathrm{id} - y\mathbf{1}|^2}{\delta^2}$$

schreiben. Daraus können wir das Folgende schliessen:

$$L_n |f - f(y)\mathbf{1}| \le \varepsilon L_n \mathbf{1} + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} L_n(\mathrm{id} - y\mathbf{1})^2 = \varepsilon L_n \mathbf{1} + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\big(L_n \mathrm{id}^2 - 2y L_n \mathrm{id} + y^2 L_n \mathbf{1}\big).$$

Dies gilt für alle $y \in [0,1]$. Jetzt können wir die Funktionen in der obigen Ungleichung an einer festen Stelle $y \in [0,1]$ auswerten

$$\begin{aligned}(L_n|f - f(y)\mathbf{1}|)(y) &\leq \varepsilon(L_n\mathbf{1})(y) + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\big((L_n\mathrm{id}^2)(y) - 2y(L_n\mathrm{id})(y) + y^2(L_n\mathbf{1})(y)\big)\\ &\to M\varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\underbrace{\big(\mathrm{id}^2(y) - 2y\mathrm{id}(y) + y^2\mathbf{1}(y)\big)}_{=0} = M\varepsilon,\end{aligned}$$

wobei die gleichmäßige Konvergenz aus den Vorausstezungen folgt.
Nun schreiben wir

$$|(L_nf)(y) - f(y)| \leq |(L_nf)(y) - L_nf(y)\mathbf{1}| + |f(y)(L_n\mathbf{1})(y) - f(y)\mathbf{1}(y)| \leq M\varepsilon + |f(y)(L_n\mathbf{1})(y) - f(y)\mathbf{1}(y)|.$$

Hierbei konvergiert der zweite Term wieder nach Voraussetzung gegen 0, also $(L_nf)(y) - f(y)| \leq (M+1)\varepsilon$ für großes $n \in \mathbb{N}$ und für alle $y \in [0,1]$.

■

4.10. Definition. Sei $B := B_X(0,1)$. Ein Operator $T : X \to Y$ heißt *kompakt*, falls $T(B)$ relativ kompakt, d.h. $\overline{T(B)}$ kompakt ist. Ferner setze

$$\mathscr{K}(X,Y) := \{T \in \mathscr{L}(X,Y) : T \text{ kompakt}\}, \qquad \text{und} \quad \mathscr{K}(X) := \mathscr{K}(X,X).$$

Bemerkung:

(a) $\mathscr{K}(X,Y) \subseteq \mathscr{L}(X,Y)$

(b) $\dim X < \infty \Longrightarrow T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ist kompakt.

(c) $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, $\dim \mathrm{im}(T) < \infty \Longrightarrow T$ ist kompakt

(d) Id ist kompakt $\Longleftrightarrow \dim X < \infty$

Beweis. (a) Klar.

(b) Sei $(y_n) \subset T(B)$. Dann existiert $(x_n) \subset B$ mit $Tx_n = y_n$. Da $\overline{B}$ im Endlichdimensionalen kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ für ein $x \in \overline{B}$. Wegen der Stetigkeit von T erhalten wir

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = Tx \in \overline{T(B)}.$$

(c) $\overline{T(B)}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt ($\dim \overline{T(B)} < \infty$).

(d) Folgt aus Korollar §2.

■

4.11. Satz. Sei X ein normierter Vektorraum, Y Banachraum. Dann ist $\mathscr{K}(X,Y)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathscr{L}(X,Y)$; insbesondere ist $\mathscr{K}(X,Y)$ ein Banachraum.

Beweis. Sei $(T_n) \subseteq \mathscr{K}(X,Y)$ und $T_n \to T$. Es ist $T \in \mathscr{K}(X,Y)$ zu zeigen. Sei $(x_k) \subseteq B_X(0,1)$. Nach Voraussetzung besitzt (T_1x_k) eine konvergente Teilfolge $(T_1x_k^1)$. Rekursiv erhalten wir konvergente Teilfolgen $(T_nx_k^n)$ (für $k \to \infty$) mit $(x_k^{n+1}) \subset (x_k^n)$. Dann ist $y_n := x_n^n$ eine Teilfolge von x_n. Wir zeigen nun dass

(Ty_n) eine Cauchyfolge ist. Zu $\varepsilon > 0$ existiert $m \in \mathbb{N}$, so dass $\|T_m - T\| \le \varepsilon$ und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|T_m y_n - T_m y_k\| \le \varepsilon$, $n, k \ge N$. Daher folgt

$$\begin{aligned} \|Ty_n - Ty_k\| &\le \|Ty_n - T_m y_n\| + \|T_m y_n - T_m y_k\| + \|T_m y_k - Ty_k\| \\ &\le \|T - T_m\|\|y_n\| + \|T_m y_n - T_m y_k\| + \|T_m - T\|\|y_k\| \\ &\le 2\varepsilon + \varepsilon, \quad n, k \ge N \end{aligned}$$

■

Korollar: Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ und $(T_n) \subset \mathscr{L}(X,Y)$ mit $\dim \operatorname{im}(T_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\|T - T_n\| \to 0 \Longrightarrow T$ ist kompakt.

Bemerkung: Gilt die Umkehrung? P. Enflo, 1973: Nein, im Allgemeinen.
Also es gibt einen Banachraum X und einen kompakten Operator $T : X \to X$, so dass T nicht durch Operatoren mit endlichdimensionalem Bild approximiert werden kann.

4.12. Satz. Seien X, Y, Z Banachräume, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, $S \in \mathscr{L}(Y,Z)$. T oder S kompakt $\Longrightarrow ST$ kompakt. Insbesondere ist $\mathscr{K}(X)$ in $\mathscr{L}(X)$ ein Ideal.

Beweis. Sei $(x_n) \subset B_X(0,1)$. Es ist zu zeigen, dass (STx_n) eine konvergente Teilfolge hat. Im Fall, dass T kompakt ist, erhalten wir eine konvergente Teilfolge (Tx_{n_k}), also ist auch (STx_{n_k}) konvergent. Sei S kompakt, dann besitzt (STx_n) eine konvergente Teilfolge, da (Tx_n) beschränkt ist. ■