§ 3 Fixpunktsätze

3.1. Satz [Banachscher Fixpunktsatz]. Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine strikte Kontraktion, d.h. es existiert ein $0 \leq q < 1$ so, dass $d(Tx,Ty) \leq qd(x,y)$ für alle $x,y \in X$. Dann besitzt T einen eindeutigen Fixpunkt.

Beweis. Beh.: Es existiert ein Fixpunkt.
Es gilt:

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,Tx) + d(Tx,Ty) + d(Ty,y) \\ &\leq d(x,Tx) + qd(x,y) + d(Ty,y), \quad x,y \in X. \end{aligned}$$

Damit folgt $d(x,y) \leq 1/(1-q)(d(x,Tx)+d(y,Ty))$, $x,y \in X$. Setze nun $x_n := T^n x$ für ein $x \in X$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $q^{n_0}/(1-q) \leq \varepsilon/2d(x,Tx)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leq \frac{1}{1-q}\left(d(x_n,x_{n+1}) + d(x_m,x_{m+1})\right) \\ &\leq \frac{1}{1-q}\left(q^n d(x,Tx) + q^m d(x,Tx)\right) \leq \varepsilon, \quad n,m \geq n_0, \end{aligned}$$

d.h. (x_n) ist eine Cauchyfolge. Da X vollständig ist, existiert $\overline{x} \in X$ mit $d(\overline{x},x_n) \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Außerdem gilt nach Definition von (x_n)

$$d(\overline{x},T\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,T\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} d(Tx_n,T\overline{x}) \leq q \lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0.$$

Beh.: Der Fixpunkt ist eindeutig.
Sei $x,y \in X$ mit $Tx = x$ und $Ty = y$. Dann folgt:

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq qd(x,y),$$

d.h. $d(x,y) = 0$. ∎

3.2. Satz [Brouwerscher Fixpunktsatz]. Betrachte die Kugel

$$B := \overline{B(0,1)} \subseteq \mathbb{R}^d$$

und eine stetige Funktion $F : B \to B$. Dann besitzt F einen Fixpunkt.

Beweis. Wir zeigen erstmal das folgende Lemma:

Lemma: Sei $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und $\varphi(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $|x| \geq 1$. Dann ist φ surjektiv.

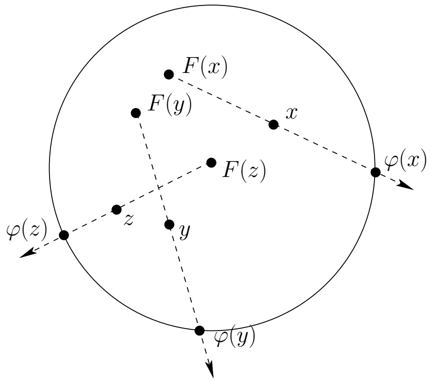
Um dies zu zeigen, nehmen wir an, dass ein y_0 nicht im Bild von φ liegt. Dann muss aber y_0 in $B(0,1)$ liegen. Da $\varphi(\overline{B(0,1)})$ kompakt, also abgeschlossen ist, gibt es eine kleine Kugel $B = B(y_0,\varepsilon)$ mit $\operatorname{im}\varphi \cap B' = \emptyset$. Sei f eine Funktion mit $\operatorname{supp} f \subseteq B'$ und $\int f \neq 0$. Die Transformationsformel liefert

$$\int f(\varphi(x))|\det \varphi'(x)|\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y \neq 0.$$

Ein Widerspruch, denn $\operatorname{im}\varphi \cap \operatorname{supp} f = \emptyset \implies \int f(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x = 0$. Das Lemma ist so bewiesen.

Wir zeigen jetzt, dass eine stetige Funktion $\varphi : \overline{B(0,1)} \to \overline{B(0,1)}$, welche auf $\{x : |x| = 1\}$ die Identität ist, surjektiv auf $B(0,1)$ sein muss. Erst betrachte den Fall, dass φ differenzierbar ist. Setze φ durch die Identität außerhalb der Einheitskugel fort. Das obige Lemma liefert die Surjektivität von φ. Nun approximiere φ mit differenzierbaren Funktionen, um den allgemeinen Fall zu erhalten.

Sei jetzt $F : B \to B$ stetig. Nehmen wir an, dass F keinen Fixpunkt besitzt. Dann für jedes $x \in B$ existiert eine Halbgerade durch $F(x)$, die den Kreis in einem Punkt $\varphi(x)$ trifft. Natürlich ist die Abbildung φ stetig, ferner ist sie die Identität auf $S = \{x : |x| = 1\}$ und bildet B auf S. Ein Widerspruch.



■

Lemma: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine kompakte konvexe Menge. Dann gibt es eine stetige Funktion $R : \mathbb{R}^d \to K$ mit $R(x) = x$ für $x \in K$.

Beweis. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^d$, existiert ein eindeutig bestimmtes Element $y_0 \in K$ mit $\|x_0 - y_0\|_2 = \operatorname{dist}(x_0, K)$. Damit definieren wir die Abbildung

$$R : \mathbb{R}^d \to K,\ R(x_0) := y_0.$$

Wir zeigen nun die Stetigkeit von R. Sei $x_n \to x$. Da $R(x_n)$ in der kompakten Menge K liegt, existiert eine Teilfolge $(R(x_{n_k}))$ mit $R(x_{n_k}) \overset{k\to\infty}{\to} y$. Es gilt

$$\|x - y\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - R(x_{n_k})\| = \lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(x_{n_k}, K) = \operatorname{dist}(x, K),$$

d.h. $R(x) = y$. ■

3.3. Satz. Sei $\emptyset \neq K$ eine kompakte konvexe Menge in einem endlichdimensionalen normierten Raum, und sei $F : K \to K$ stetig. Dann besitzt F einen Fixpunkt.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $K \subseteq \mathbb{R}^d$ annehmen. Dann liegt K in einer Kugel $\overline{B(0, r)}$. Sei R die Funktion aus dem obigen Lemma. Betrachte $G := F \circ R$, und wende auf G den Brouwersche Fixpunktsatz an. Sei x der Fixpunkt von G. Dann $x = G(x) = F(R(x))$, d.h. $x \in K$ und deswegen $R(x) = x$, also auch $F(x) = x$. ■

3.4. Satz [Fixpunktsatz von Schauder]. Sei X ein normierter Vektorraum und $\emptyset \neq K \subseteq X$ kompakt und konvex. Sei $F : K \to K$ stetig. Dann besitzt F ein Fixpunkt.

Beweis. Wir verwenden den endlichdimensionalen Fall. Wegen Kompaktheit können wir K mit endlich vielen $B(x_i, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $x_i \in K$, $i = 1, \dots, n$ Kugeln überdecken. Definiere stetige Funktionen $f_i : K \to \mathbb{R}$ durch $f_i(x) = \max\{0, \varepsilon - \|x - x_i\|\}$, und setze $f(x) = \sum_{i=1}^n f_j(x)$. Wegen der Überdeckungseigenschaft gilt $f(x) > 0$ auf K, deshalb sind $g_j := f_j / f$ auch stetige Funktionen mit Werten in $[0, 1]$. Es sei $Y := \operatorname{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$ und $K' := K \cap Y$. Für jedes $x \in K$ liegt $G(x) := \sum_{i=1}^n g_i(x) x_i$ in K' (Konvexität). Deshalb bildet die stetige Funktion $G \circ F$ die Menge K' in K' und besitzt nach Satz 3.3 einen Fixpunkt x_ε. Es gilt dann

$$\|G(x) - x\| = \left\| \sum_{i=1}^n g_i(x) x_i - \sum_{i=1}^n g_i(x) x \right\| \le \sum_{i=1}^n g_i(x) \|x_i - x\| \le \varepsilon.$$

Daraus folgt $\|x_\varepsilon - F(x_\varepsilon)\| \le \varepsilon$. Betrachte $x_{1/n}$ und Wähle eine Teilfolge, für die $F(x_{1/n_k})$ konvergiert für $n_k \to \infty$, etwa gegen x (Kompaktheit). Nach Voraussetzung konvergiert x_{1/n_k} auch gegen x. Wegen der Stetigkeit erhalten wir $F(x) = x$. ■