§ 2 Kompaktheit

2.1. Definition. Sei (X, d) ein metrischer (topologischer) Raum. ir verwenden die Notation

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

a) Eine Menge $K \subseteq X$ heißt *kompakt*, falls man für jede offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$, $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ eine endliche Teilüberdeckung findet, d.h. es existiert eine endliche Menge $J \subseteq I$ mit $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$.

b) Besitzt jede Folge $(x_n) \subseteq K$ eine konvergente Teilfolge mit Limes in K, dann heißt K *folgenkompakt.*

c) Ist der Abschluss $\overline{K}$ (folgen)kompakt, dann heißt K *relativ (folgen)kompakt.*

Lemma: Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $X \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$ nicht leere, abgeschlossene Teilmengen. Dann gilt $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$. Konvergiert $\operatorname{diam} F_n := \sup\{d(x, y) : \ x, y \in F_n\}$ gegen 0, dann enthält der Durchschnitt nur einen Punkt.

Beweis. Setze $U_n : X \setminus F_n$. Falls $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$ leer wäre, würde $\bigcup_{n=1}^\infty U_n = X$ gelten, und wegen Kompaktheit auch $U_N = \bigcup_{n=1}^N U_n = X$ für ein N. Dies kann aber nicht passieren, denn $U_N = X \setminus F_N \neq X$. Der Zusatz ist klar. ■

Satz: Ein folgenkompakter metrischer Raum (X, d) ist immer separabel.

Beweis. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv eine endliche Folge. Angenommen x_i^k $(i \leq n)$ ist bestimmt, dann betrachte die Menge

$$B := \bigcup_{i=1}^n B(x_i^k, 1/k).$$

Falls $B = X$, setzen wir $n_k := n$, und die Rekursion ist beendet. Wäre $B \subsetneq X$, wähle $x_{n+1}^k \in X \setminus B$. Wir behaupten, dass die Rekursion immer in endlich vielen Schritten endet. Wäre dies nicht so, dann wäre $(x_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine (unendliche) Folge, welche keine konvergente Teilfolge besitzen würde (denn $\mathrm{d}(x_i^k, x_{i+1}^k) > 1/k$) : ein Widerspruch. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ betrachte die endliche Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^{n_k} B(x_i^k, 1/k)$. Die abzählbare Menge $\{x_i^k : \ 1 \leq i \leq n_k, \ k \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in X. Denn sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei k so groß, dass $1/k \leq \varepsilon$. Dann existiert ein x_i^k mit $a \in B(x_i^k, 1/k)$, also folgt die Behauptung. ■

2.2. Satz. Sei X ein metrischer Raum. Dann sind die Begriffe folgenkompakt und kompakt äquivalent.

Beweis. Sei $K \subseteq X$ folgenkompakt, $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung, und setze $U := \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Erstmal zeigen wir die Existenz einer abzählbaren Teilüberdeckung. Sei $A \subseteq K$ eine abzählbare, dichte Menge in K. Betrachte die Menge

$$J := \{(x, r) : \ x \in A, \ r \in \mathbb{Q}_+, \ B(x, r) \subseteq U_\alpha \text{ für ein } \alpha \in I\},$$

welche immer noch abzählbar ist. Für $(x, r) \in J$ wähle eine Menge $U_{\alpha(x,r)}$ mit $B(x, r) \subseteq U_{\alpha(x,r)}$.
Behauptung: $K \subseteq \bigcup_{(x,r) \in J} U_{\alpha(x,r)}$.
Sei $y \in K$, dann gilt $y \in U_\alpha$ für ein $\alpha \in I$, also existiert $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ mit $B(y, r) \subseteq U_\alpha$. Wegen der Dichtheit gibt es $x \in A$ mit $x \in B(y, r/4)$, und so gilt $y \in B(x, r/2) \subseteq B(y, r) \subseteq U_\alpha$. Dies zeigt $y \in U_{\alpha(x,r/2)}$.

Wir können jetzt annehmen, dass $I = \mathbb{N}$. Nehmen wir an, dass keine endliche Teilüberdeckung existiert. Das heißt für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $x_n \in K \setminus \bigcup_{k=1}^n U_k$. Nach Voraussetzung hat (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_n'), $x_n' \to x \in K$. Aber dann kann x nicht in $\bigcup_{k=1}^\infty U_k$ liegen: ein Widerspruch.

Umgekehrt: Sei K kompakt und $(x_n) \subseteq K$ eine Folge. Für jedes $y \in K$ betrachte die Kugel $B(y,1)$, so ist $\bigcup_{y\in K} B(y,1)$ eine offene Überdeckung. Nach Voraussetzung existiert eine endliche Teilüberdeckung $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(y_i,1)$. Dann sind für ein $1 \le i \le k$ unendlich viele x_n^1 in $B(y_i,1)$, setze $y^1 := y_i$. Betrachte nun diese Teilfolge und wiederhole die ganze Prozedere rekursiv mit $B(y,1/m)$ um eine Teilfolge (x_n^m) sowie $y^m \in K$ zu erhalten ($m \in \mathbb{N}$). Dann ist (x_m^m) eine Teilfolge von (x_n). Betrachte $F_m := \bigcap_{k=1}^{m} \overline{B(y^k, 1/k)}$. Für F_m gelten die Bedingungen von dem ersten Lemma, also $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m = \{x\}$. Es ist leicht $x_m^m \to x$ zu zeigen.

■

2.3. Satz. Sei $K \subseteq X$, wobei X ein normierter Vektorraum ist.

a) Ist K kompakt, so auch beschränkt und abgeschlossen. ACHTUNG: Dies gilt nur in normierten Vektorräumen!

b) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$. K ist kompakt genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist. ACHTUNG: Dies gilt nur in endlicher Dimension!

Beweis. a) Sei K kompakt und $K \ni x_n \to x$. Es ist $x \in K$ zu zeigen. Da K folgenkompakt ist, hat (x_n) eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to y \in K$,aber dann muss $y = x$ sein. Also gilt $x \in K$. Wäre K unbeschränkt, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $\|x_n\| \ge n$, also würde (x_n) keine konvergente Teilfolge besitzen, ein Widerspruch.

b) ÜA. ■

2.4. Satz [Rieszsches Lemma]. Sei X ein normierter Vektorraum und Y ein abgeschlossener Unterraum, $Y \ne X$. Ferner sei $0 < \delta < 1$. Dann existiert ein $x_\delta \in X$ mit $\|x_\delta\| = 1$ und

$$\|x_\delta - y\| > 1 - \delta \qquad \text{für alle } y \in Y.$$

Beweis. Sei $x \notin Y$ und setze $d := \operatorname{dist}(x, Y)$. Dann $d > 0$, denn Y ist abgeschlossen. Es gilt natürlich $d < d/(1-\delta)$, also existiert $y_\delta \in Y$ mit $\|x - y_\delta\| < d/(1-\delta)$. Nun setze $x_\delta := (x - y_\delta)/\|x - y_\delta\|$. Dann $\|x_\delta\| = 1$, und für alle $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned}\|x_\delta - y\| &= \left\| \tfrac{x}{\|x-y_\delta\|} - \tfrac{y_\delta}{\|x-y_\delta\|} - y \right\| = \tfrac{1}{\|x-y_\delta\|} \|x - (y_\delta + \|x - y_\delta\| y)\| \\ &\ge \tfrac{d}{\|x-y_\delta\|} > \tfrac{1-\delta}{d} \cdot d = 1 - \delta.\end{aligned}$$

■

Korollar: Sei X ein normierter Vektorraum. Äquivalent sind:

i) $\dim X < \infty$

ii) $\overline{B_X(0,1)}$ ist kompakt

iii) Jede beschränkte Folge $(x_n) \subseteq X$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Trivial.

ii) $\Rightarrow$ iii): Siehe Satz 2.2.

iii) $\Rightarrow$ i): Folgt aus Rieszschem Lemma. ■

Deswegen ist es interessant Charakterisierungen der Kompaktheit in verschiedenen Räumen zu untersuchen.

2.5. Theorem [Arzelà–Ascoli]. Sei (K, d) ein nicht leerer, kompakter metrischer Raum. Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq C(K)$ ist kompakt in $C(K)$ genau dann, wenn sie

(a) abgeschlossen,

(b) beschränkt und

(c) (gleichmäßig) gleichgradig stetig ist, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in K$ mit $d(x, y) < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$.

Beweis. *Notwendigkeit:* (a) und (b) folgen aus Satz 2.3.
Sei $\varepsilon > 0$ und $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} B(f, \varepsilon)$ eine offene Überdeckung. Wegen der Kompaktheit erhalten wir $f_1, f_2, \ldots, f_n$ mit $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \varepsilon)$. Da K kompakt ist, sind f_i, $i = 1, \ldots, n$, gleichmäßig gleichgradig stetig, d.h.,

$$\exists \delta > 0 : |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n, \ d(x, y) < \delta.$$

Nun sei $f \in \mathcal{F}$ beliebig. Dann ist $f \in B(f_i, \varepsilon)$ für ein $1 \leq i \leq n$, und

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \leq 3\varepsilon.$$

Die Bedingung ist hinreichend: Wir zeigen nun, dass $\mathcal{F}$ folgenkompakt ist. Sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge in K und $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ eine beliebige Folge. Da $\mathcal{F}$ beschränkt ist, existiert $(f_n^1) \subset (f_n)$ so, dass $(f_n^1(x_1))$ konvergiert. Wähle aus dieser Folge $(f_n^2) \subset (f_n^1)$ so, dass $(f_n^2(x_2))$ konvergiert, u.s.w. Setze $g_n := f_n^n$. Dann ist (g_n) eine Teilfolge von f_n und $g_n(x_k)$ konvergiert für jedes $k \in \mathbb{N}$.
Behauptung: (g_n) ist eine Cauchyfolge
Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ nach (c). Dann existieren x_{i_k}, $k = 1, \ldots, n$ mit $K \subset \cup_{k=1}^n B(x_{i_k}, \delta)$. Für $x \in K$ existiert daher $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $d(x_i, x) < \delta$. Da $(g_m(x_{i_k}))$ eine Cauchyfolge für $k = 1, \ldots, n$ ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, unabhängig von x, so dass für $m, n \geq n_0$

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leq |g_m(x) - g_m(x_i)| + |g_m(x_i) - g_n(x_i)| + |g_n(x_i) - g_n(x)| \leq 3\varepsilon,$$

d.h (g_n) ist eine Cauchyfolge in $C(K)$. Wegen der Vollständigkeit existiert ein $g \in C(K)$ mit $\lim_{n\to\infty} g_n = g$, d.h $\mathcal{F}$ ist folgenkompakt. ∎