§ 1 Normierte Vektorräume

Im Folgenden sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1. Definition. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

a) Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ heißt *Halbnorm* auf X falls

(N1) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ für $x, y \in X$ *(Dreiecksungleichung)*

(N2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ für $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ *(Homogenität)*

gelten.

b) Eine Halbnorm $\|\cdot\| \to \mathbb{R}$ heißt *Norm* auf X, falls zusätzlich

(N3) $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ *(Definitheit)*

gilt.

1.2. Beispiel.

a) $\mathbb{K}^d$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $x = (x_1, \ldots, x_d)$

$$\|x\|_2 := \Big(\sum_{i=1}^d |x_i|^2\Big)^{1/2}$$

(N3) und (N2) sind klar. Zum Beweis von (N1) im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ betrachte die Funktion

$$p(\lambda) := \sum_{i=1}^d (x_i - \lambda y_i)^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^d x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^d y_i^2 = c + b\lambda + a\lambda^2.$$

Dann ist $p \ge 0$ ein Polynom zweiten Grades. Daher kann es die x-Achse in höchstens einem Punkt berühren, d.h. die Diskriminante $(b^2 - 4ac)$ ist negativ oder 0:

$$\Big(2\sum_{i=1}^d x_i y_i\Big)^2 - 4\sum_{i=1}^d x_i^2 \sum_{i=1}^d y_i^2 \le \Big(2\sum_{i=1}^d x_i y_i\Big)^2 \le 0$$
$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^d x_i y_i \le \Big(\sum_{i=1}^d x_i^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^d y_i^2\Big)^{1/2} = \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Die letzte Ungleichung heißt *Cauchy–Bunyakovsky–Schwartzsche Ungleichung.* Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^2 &\le \sum_{i=1}^d |x_i + y_i||x_i| + \sum_{i=1}^d |x_i + y_i||y_i| \\
&= \Big(\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^2 \sum_{i=1}^d |x_i|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^2 \sum_{i=1}^d |y_i|^2\Big)^{1/2} \\
&= \Big(\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^2\Big)^{1/2} (\|x\|_2 + \|y\|_2),
\end{aligned}$$

also folgt die Dreiecksungleichung.

b) Sei $1 \le p < \infty$ und setze

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\Big)^{1/p}.$$

So ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\mathbb{K}^d$.

c) Sei $p : \mathbb{K}^d \to \mathbb{K}$, $p(x) = |x_1|$. So ist p eine Halbnorm aber keine Norm. Zum Beweis: Hölder Ungleichung, siehe später in dem allgemeineren Fall.

Bemerkung:

a) Sei p Halbnorm auf X. Dann gelten

(i) $p(x) \geq 0$ für alle $x \in X$ und $p(0) = 0$.

(ii) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ für alle $x, y \in X$.

b) Sei $\|\cdot\|$ Norm auf X. Dann definiert $d(x, y) := \|x - y\| \quad (x, y \in X)$ eine Metrik auf X.

1.3. Definition. Sei X Vektorraum.

a) Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X, so heißt das Paar $(X, \|\cdot\|)$ (oder manchmal auch X) *normierter Vektorraum.*

b) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum (oder (X, d) ein metrischer Raum). Eine Folge $(x_n) \subseteq X$ heißt *Cauchyfolge*, falls für alle $\varepsilon > 0$ es ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$ (oder $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$) für alle $n, m \geq N$ gilt.

c) Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt *konvergent* gegen x, falls $\|x - x_n\| \to 0$ (oder $d(x, x_n) \to 0$).

d) Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchyfolge konvergiert, heißt *vollständig.* Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum.*

Bemerkung [Eigenschaften normierter Räume]: Sei X ein normierter Raum. Dann gilt:

a) $(x_n), (y_n) \subset X$ mit $x_n \to x$, $y_n \to y \Longrightarrow x_n + y_n \to x + y$

b) $(x_n) \subset X$, $(\alpha_n) \subset \mathbb{K}$ mit $x_n \to x$, $\alpha_n \to \alpha \Longrightarrow \alpha_n x_n \to \alpha x$

c) $(x_n) \subset X$ mit $x_n \to x \Longrightarrow \|x_n\| \to \|x\|$

Bemerkung:

d) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $E \subseteq X$ ein Unterraum. Der Raum E ist genau dann vollständig, wenn E abgeschlossen ist.

e) Eine Cauchyfolge ist immer beschränkt.

f) Eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, ist konvergent.

1.4. Beispiel.

a) $\mathbb{R}^d$ versehen mit

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\Big)^{1/p} \text{ oder } \|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

ist ein Banachraum.

Beweis. ÜA. ∎

b) Räume beschränkter Folgen

ℓ^∞: Raum aller beschränkten Folgen:

$$\ell^\infty := \Big\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\Big\}.$$

c: Raum aller konvergenten Folgen:

$$c := \Big\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ x_n \text{ ist konvergent}\Big\},$$

c_0: Raum aller Nullfolgen:

$$c_0 := \Big\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ x_n \to 0\Big\}$$

Dann gilt $c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty$. Versehen mit $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ sind alle Banachräume.

Beweis. ℓ^∞: Sei $x_n \in \ell^\infty$ eine Cauchy-Folge und $0 < \varepsilon < 1$. So ist $x_n(k) \in \mathbb{K}$ auch eine Cauchy-Folge, denn

$$|x_n(k) - x_m(k)| \le \|x_n - x_m\|_\infty \le \varepsilon \quad \text{für } n, m \text{ genügend groß.}$$

Daher konvergier $x_n(k)$ gegen ein $x(k) \in \mathbb{K}$ für jedes feste $k \in \mathbb{N}$. Die obige Abschätzung zeigt sogar, dass $\|x_n - x\|_\infty \le \varepsilon$ für $n \ge N$, also $x_n \to x$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Es gilt

$$|x(k)| = |x(k) - x_n(k)| + |x_n(k)| \le 1 + M \quad \text{für } n \ge N,$$

denn x_n ist eine Cauchy-Folge also beschränkt, d.h. $\|x_n\|_\infty \le M$.
Die Vektorräume c und c_0 sind abgeschlossen in ℓ^∞. Wir zeigen nur den Fall c_0. Sei $(a_n)^k \in c_0$, so dass $(a_n)^k \to (b_n) \in \ell^\infty$ für $k \to \infty$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} |b_n| &\le |b_n - a_n^k| + |a_n^k| \le \|(b_n) - (a_n)^k\|_\infty + |a_n^k| \\ &\le \varepsilon + |a_n^k|, \quad k \ge n_0,\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Für festes $k \ge n_0$ und hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n^k| \le \varepsilon$. Also $|b_n| \le 2\varepsilon$ für $n \ge n_0$. Wir haben also $(b_n) \in c_0$ gezeigt.

■

c) Räume stetiger Funktionen

Sei $\emptyset \ne K$ eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^d$. Betrachte

$$C(K) := \{f : K \to \mathbb{K} \text{ stetig}\} \quad \text{versehen mit} \quad \|f\|_\infty := \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

Dann ist $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Analog definiert man $C(K, \mathbb{K}^d)$, der Raum von $\mathbb{K}^d$-wertigen, stetigen Funktionen. Die Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm heißt *gleichmäßige Konvergenz.*

Beweis. Klar: $\|\cdot\|$ ist eine Norm.
Vollständigkeit: Sei $f_n \in C(K)$ eine Cauchy-Folge. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_\infty \le \varepsilon \quad \text{für } n, m \ge N \text{ und } x \in K.$$

Das heißt $f_n(x) \in \mathbb{K}$ ist eine Cauchy-Folge also konvergent gegen ein $g(x)$. Es gilt ferner $|f_n(x) - g(x)| \le \varepsilon$ für $n \ge N$ (N unabhängig von x!), also $f_n \to g$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Es bleibt noch $g \in C(K)$ zu zeigen. Sei $x \in K$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - g\|_\infty \le \varepsilon$. Die Funktion f_n ist aber stetig, also ex gint ein $\delta > 0$ mit $f_n(y) \in B(f_n(x), \varepsilon)$ für $y \in B(x, \delta)$. Daher gilt

$$|g(x) - g(y)| \le |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - g(y)| \le 3\varepsilon \quad \text{für } y \in B(x, \delta).$$

■

d) Räume beschränkter/stetiger Funktionen
Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene oder abgeschlossene Menge. Betrachte die folgende Vektorräume

$$\begin{aligned} F_b(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ beschränkt}\}, \\ M_b(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ beschränkt und Borel messbar}\}, \\ C_b(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ beschränkt und stetig}\}, \\ BUC(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ beschränkt und gleichmäßig stetig}\}, \\ C_c(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ stetig und } \operatorname{supp} f \subseteq \Omega \text{ ist kompakt}\}. \end{aligned}$$

Es gilt $C_c(\Omega) \subseteq BUC(\Omega) \subseteq C_b(\Omega) \subseteq M_b(\Omega) \subseteq F_b(\Omega)$. Versehen mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|,$$

sind $BUC(\Omega)$, $C_b(\Omega)$, $M_b(\Omega)$ und $F_b(\Omega)$ Banachräume. $C_c(\Omega)$ ist vollständig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ genau dann wenn Ω kompakt ist. Die Vervollständigung (Abschluss) von $C_c(\Omega)$ wird mit $C_0(\Omega)$ bezeichnet und ist natürlich in $BUC(\Omega)$ enthalten.

Beweis. Siehe c). ■

e) Holomorphe Funktionen
Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und betrachte den Raum

$$H^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ beschränkt und holomorph}\}.$$

Versehen mit der Supremumsnorm ist $H^\infty(\Omega)$ ein Banachraum, denn er ist ein abgeschlossener Unterraum von $C_b(\Omega)$.

Beweis. Siehe Funktionentheorie. ■

f) Summierbare Folgen
Sei $1 \leq p < \infty$. Betrachte den Raum

$$\ell^p := \Big\{(a_n) : \ (a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \ \sum_{n=1}^\infty |a_n|^p < +\infty\Big\},$$

und die Norm $$\|(a_n)\|_p := \Big(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p\Big)^{1/p}.$$

Dann ist $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.

Beweis. Beweis im Falle $p = 1$ (der Fall $p \neq 1$ kommt später):
Beh.: $\|\cdot\|_1$ ist eine Norm.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \|(a_n) + (b_n)\|_1 \leq \sum_{n=1}^\infty |a_n + b_n| &\leq \sum_{n=1}^\infty |a_n| + \sum_{n=1}^\infty |b_n| \\ &= \|(a_n)\|_1 + \|(b_n)\|_1. \end{aligned}$$

Die anderen Eigenschaften einer Norm sind auch klar.
Beh.: $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ist vollständig.
Sei $a_n \in \ell^1$ eine Cauchyfolge. Es gilt $|a_n(k) - a_m(k)| \leq \|(a_n - a_m\|_1$, d.h. $a_n(k) \in \mathbb{K}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Daher ist sie auch konvergent: $a_n(k) \to b(k)$ für $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\|a_n - a_m\|_1 = \sum_{j=1}^\infty |a_n(j) - a_m(j)| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Da $a_n \in \ell^1$ eine Cauchy-Folge ist, existiert ein $K \in \mathbb{R}$ mit $\|a_n\|_1 \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Sei $l \in \mathbb{N}$ beliebig und wähle m groß genug, so dass

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{l} |b(j)| &\leq \sum_{j=1}^{l} |b(j) - a_m(j)| + \sum_{j=1}^{l} |a_m(j)| \leq \sum_{j=1}^{l} |b(j) - a_m(j)| + \|a_m\|_1 \\ &\leq \sum_{n=1}^{l} |b(j) - a_m(j)| + M \leq \varepsilon + M.\end{aligned}$$

Also $(b_n) \in \ell^1$.
Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\|a_n - a_m\|_1 \leq \varepsilon/2$, $m \geq n$. Dann gilt für $l \in \mathbb{N}$ groß genug (abhängig von n, das aber jetz fest gewählt ist):

$$\sum_{j=l}^{\infty} |a_m(j)| \leq \sum_{j=l}^{\infty} |a_m(j) - a_n(j)| + \sum_{j=l}^{\infty} |a_n(j)| \leq \varepsilon, \quad m \geq n.$$

Sei nun $l \in \mathbb{N}$ noch größer, damit auch $\sum_{j=l}^{\infty} |b(j)| \leq \varepsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} |b(j) - a_m(j)| &= \sum_{j=1}^{l-1} |b(j) - a_m(j)| + \sum_{j=l}^{\infty} |b(j) - a_m(j)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{l-1} |b(j) - a_m(j)| + \sum_{j=l}^{\infty} |b(j)| + \sum_{n=l}^{\infty} |a_m(j)| \leq \sum_{j=1}^{l-1} |b(j) - a_m(j)| + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Da $a_m(1), a_m(2), \ldots, a_m(l-1) \to b(1), b(2) \ldots, b(l-1)$, folgt $\|b - a_m\|_1 \to 0$ für $m \to \infty$.

■

Bemerkung: Es gilt: $\ell^1 \subseteq c_0$, $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ und$(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ sind beide Banachräume, aber $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ is nicht vollständig.

1.5. Satz. Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum. Dann ist X vollständig $\Longleftrightarrow$ jede absolut konvergente Reihe konvergiert, d.h. für alle $x_n \in X$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ existiert ein $x \in X$ mit $\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} x_n - x \right\| = 0$.

Beweis. "$\Rightarrow$": Da $\left(\sum_{n=1}^{m} x_n\right)_m$ eine Cauchyfolge ist, folgt die Behauptung.

"$\Leftarrow$": Sei $(x_n) \subseteq X$ eine Cauchyfolge. Zu $\varepsilon_k := 2^{-k}$ wähle $N_k \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k}$ falls $n, m \geq N_k$. Dann existiert es eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $y_k := x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$. Dann $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| < +\infty$. Nach Voraussetzung existiert es $y \in X$ mit

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{m} y_k \right\| = \|y - (x_{n_{m+1}} - x_{n_1})\| \to 0 \quad \text{als } m \to \infty.$$

Eine Teilfolge von (x_n) konvergiert und (x_n) ist Cauchyfolge, also konvergiert auch (x_n). ■

Elementare Konstruktionen – Summen und Quotienten

1.6. Definition.

a) X und Y heißen *isomorph*, falls eine lineare Bijektion $J : X \to Y$ existiert.

b) Seien $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, |||\cdot|||)$ *isometrisch isomorphe* normierte Vektorräume, d.h. es existiert ein linearer (algebraischer) Isomorphismus J zwischen X und Y, welcher auch eine Isometrie ist: $|||Jx||| = \|x\|$. Notation: $X \simeq Y$.

Bemerkung:

a) Seien X und Y isomterisch isomorph. Dann ist X vollständig genau dann, wenn Y vollständig ist.

b) Es gilt $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \simeq (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, aber $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1) \not\simeq (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ für $d \geq 3$!

1.7. Definition. Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf einem Vektorraum X heißen *äquivalent*, falls $c, C > 0$ existieren mit

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \quad \text{für alle } x \in X.$$

Bemerkung:

a) Seien $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen auf X. Dann sind äquivalent

(i) $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ sind äquivalente Normen

(ii) Eine Folge $(x_n) \subset X$ konvergiert gegen x bezüglich $\|\cdot\| \iff (x_n)$ konvergiert gegen x bezüglich $|||\cdot|||$

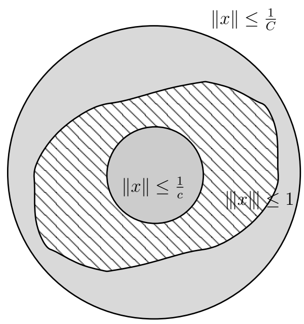
(iii) Eine Folge $(x_n) \subset X$ ist Nullfolge bezüglich $\|\cdot\| \iff (x_n)$ ist Nullfolge bezüglich $|||\cdot|||$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sind klar.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Annahme: es existiert kein $C > 0$ mit $|||x||| \leq C\|x\|$ für alle $x \in X$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert $x_n \in X$ mit $|||x_n||| \geq n\|x_n\|$. Sei $y_n := \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. Dann konvergiert $y_n \overset{\|\cdot\|}{\to} 0$, aber $|||y_n||| \geq 1$: ein Widerspruch. Die Existenz von c beweist man analog. ∎

b) Geometrische Bedeutung vom Definition 1.7:

$$\{x \in X : \|x\| \leq \tfrac{1}{C}\} \subseteq \{x \in X : |||x||| \leq 1\} \subseteq \{x \in X : \|x\| \leq \tfrac{1}{c}\}.$$



Topologische Bedeutung: die zwei Normen bestimmen dieselbe Topologie, d.h., die offenen Mengen sind die selben für beide Normen.

c) Auf $X := C([0,1])$ sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ nicht äquivalent.

Beweis. Sei $f_n(x) = x^n$. Dann gilt

$$\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

d.h $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$, aber $\|f_n\|_\infty = 1$. ∎

d) Ist $(\|\cdot\|)$ vollständig und $\|\cdot\|$ mit $|||\cdot|||$ äquivalent, so ist $(X, |||\cdot|||)$ auch vollständig.

Beweis. ÜA. ∎

e) Sei $\alpha > 0$ und

$$\|f\|_\alpha := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|e^{-\alpha t} \quad f \in C([0,1]).$$

Auf $C([0,1])$ sind $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_\alpha$ äquivalent.

Beweis. ÜA. ∎

Satz: Auf einem endlichdimensionalen Raum sind je zwei Normen äquivalent.

Beweis. Betrachte eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^d$, und sei $e_1, \dots, e_d$ die Standardbasis in $\mathbb{K}^d$. Wir zeigen, dass $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind. Für $x \in \mathbb{R}^d$ gilt $x = x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d$, und damit

$$\begin{aligned}\|x\| = \|x_1e_1 + \cdots + x_de_d\| &\le \|x_1e_1\| + \cdots + \|x_de_d\| = |x_1| \cdot \|e_1\| + \cdots + |x_d| \cdot \|e_d\| \\ &\overset{\text{C.S.-Ungl.}}{\le} (\|e_1\|^2 + \cdots + \|e_d\|^2)^{1/2}(|x_1|^2 + \cdots + |x_d|^2)^{1/2} = M\|x\|_2,\end{aligned}$$

mit $M := (\|e_1\|^2 + \cdots + \|e_d\|^2)^{1/2}$. D.h. $\|x\| \le M\|x\|_2$. Dies zeigt insbesondere, dass $x \mapsto \|x\|$ eine stetige Funktion auf (dem euklidischen) $\mathbb{K}^d$ ist. Die Einheitspäre $S \subseteq \mathbb{K}^d$ ist kompakt (siehe Analysis I-II.), und $\|\cdot\|$ ist eine stetige positive Funktion darauf. D.h. $\|\cdot\|$ hat ein positives Minimum m auf S. Sei $x \in \mathbb{K}^d$ beliebig, dann $\frac{x}{\|x\|_2} \in S$ und damit $m \le \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|$, d.h. $m\|x\|_2 \le \|x\|$. ■

1.8. Definition [Produktraum].

Seien X, Y normierte Vektorräume und $1 \le p \le \infty$. Dann definiert

$$\|(x,y)\|_p := \begin{cases} \Big(\|x\|^p + \|y\|^p\Big)^{1/p} & 1 \le p < \infty \\ \max\{\|x\|, \|y\|\} & p = \infty. \end{cases}$$

eine Norm auf $X \times Y$. Das Paar $(X \times Y, \|(\cdot,\cdot)\|_p)$ wird mit $X \underset{p}{\times} Y$ bezeichnet.

Bemerkung:

a) Die Normen $\|(\cdot,\cdot)\|_p$ sind alle äquivalent auf $X \times Y$.

b) Sind X, Y vollständig, folgt die Vollständigkeit von $X \underset{p}{\oplus} Y$ auch.

Beweis. ÜA. ■

Beispiel:

a) $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p) \underset{p}{\oplus} (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p) \simeq (\mathbb{R}^{d+m}, \|\cdot\|_p)$.

b) $C([0,1]) \underset{\infty}{\oplus} C([0,1]) \simeq C([0,1], \mathbb{K}^2)$

1.9. Definition und Satz [Quotientenraum].

a) Sei X normierter Vektorraum und $A \subseteq X$. Der *Abstand* von einem $x \in X$ zu A ist definiert durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{\|x - y\| : y \in A\}.$$

Es gilt: $\operatorname{dist}(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

b) Sei X normierter Vektorraum, $E \subseteq X$ abgeschlossener Unterraum. Betrachte den *Quotientenraum* X/E. Sei $\hat{x} := x + E \in X/E$. Dann definiert $\|\hat{x}\| := \operatorname{dist}(x, E)$ eine Norm auf X/E.

Beweis. Die Funktion $x \mapsto \|\hat{x}\|$ ist wohldefiniert: Sei $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$, also $x_1 = x_2 + y$ mit $y \in E$. Dann gilt $\operatorname{dist}(x_1, E) = \operatorname{dist}(x_2, E)$.

Definitheit: $\|\hat{x}\| = 0 \iff \operatorname{dist}(x, E) = 0 \iff x \in \overline{E} = E \implies \hat{x} = 0$.
Homogenität: klar. Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\|\hat{x} + \hat{y}\| = \inf_{z \in E} \|x + y + z\| &= \inf_{z_1, z_2 \in E} \|x + y + z_1 + z_2\| \le \inf_{z_1, z_2 \in E} \|x + z_1\| + \|y + z_2\| \\ &= \inf_{z_1 \in E} \|x + z_1\| + \inf_{z_2 \in E} \|y + z_2\| = \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|.\end{aligned}$$

■

Beispiel: Es sei $a \le \alpha < \beta \le b$ und $E := \{f \in C([a,b]) : f(s) = 0$ für alle $s \in [\alpha, \beta]\}$. E ist ein abgeschlossener Unterraum von $C([a,b])$. Der Quotient $C([a,b])/E$ ist isometrisch isomorph zu $C([\alpha,\beta])$.

Satz: Sei X Banachraum und E abgeschlossener Unterraum. Dann ist X/E ein Banachraum.

Beweis. Sei $x_n \in X$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{x}_n\| < +\infty$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen $\|x_n\| \le \|\hat{x}_n\| + 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ und nach Voraussetzung existiert $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Daher

$$\Big\|\hat{x} - \sum_{n=1}^{m} \hat{x}_n\Big\| = \Big\|\widehat{x - \sum_{n=1}^{m} x_n}\Big\| \le \Big\|x - \sum_{n=1}^{m} x_n\Big\| \to 0 \quad \text{für } m \to \infty.$$

Die Behauptung folgt aus Satz 1.5. ∎

1.10. Definition. Ein metrischer Raum X heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge A besitzt. Hierbei heißt A *dicht* in X, falls für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in X$ ein $a \in A$ existiert mit $d(a,x) \le \varepsilon$.

Beispiel:

a) $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ ist separabel für $1 \le p \le \infty$.

b) $X = C([0,1])$ versehen mit $\|\cdot\|_\infty$ ist separabel.

c) Sei $1 \le p < \infty$, dann ist ℓ^p ist separabel, ℓ^∞ ist nicht separabel.

Beweis. Approximationssatz von Weierstraß: die Polynome sind dicht in $C([0,1])$. Wähle Polynome mit rationalen Koeffizienten, um eine abzählbare Menge zu erhalten.b) Der Unterraum

$$c_{00} := \big\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_n = 0 \text{ für } n \ge N, \text{ für ein } N\big\}$$

und somit auch $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \cap c_{00}$ sind dicht in ℓ^p für $1 \le p < \infty$. Sei $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n \dots, \}$ in ℓ^∞ eine abzählbare Teilmenge. Wähle $y \in \ell^\infty$, so dass $|y_k| \le 1$ und $|y_k - x_k(k)| \ge 1$. Dies zeigt, dass D nicht dicht sein kann. ∎

Satz: Ist X ein separabler metrischer Raum, so ist jede Teilmenge $A \subseteq X$ auch separabel.

Beweis. Sei $\{x_1, x_2, \dots, x_n \dots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Betrachte die abzählbare Familie von Mengen $B(x_n, r_k)$ für $n, k \in \mathbb{N}$ wobei $\mathbb{Q}_+ = \{r_1, r_2, \dots\}$. Für jedes $n, k \in \mathbb{N}$ wähle $y_{n,k} \in A \cap B(x_n, r_k)$, falls diese Menge nicht leer ist. So ist $\{y_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}\}$ dicht in A. ∎

1.11. Satz [Stone–Weierstraß]. Sei $\emptyset \ne K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Betrachte die Banachalgebra $C(K)$ sowie eine Teilalgebra $\mathscr{A} \subseteq C(K)$, so dass

a) $\mathbf{1} \in \mathscr{A}$; $\mathbf{1}$ ist die Konstante 1-Funktion.

b) Für alle $x, y \in K$ $x \ne y$ existiert $f \in \mathscr{A}$ mit $f(x) \ne f(y)$;

c) $f \in \mathscr{A} \implies \overline{f} \in \mathscr{A}$ (im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Dann ist $\mathscr{A}$ dicht in $C(K)$.

Definition: Sei X ein normierter Vektorraum, welcher auch eine Algebra über $\mathbb{K}$ ist, d.h. es ist eine assoziative Multiplikation zwischen den Elementen $a, b \in X$ definiert, so dass

a) $a, b \in X$, $\lambda \in K \implies (\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b)$

b) $a, b, c \in X \implies (a+b)c = ac + bc$, $c(a+b) = ca + cb$

Ist $\|ab\| \le \|a\|\|b\|$ für alle $a, b \in X$, dann heißt X normierte Algebra. Ist ferner X vollständig, nennt man X *Banachalgebra*.

Beispiel: Sei $\emptyset \ne K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann ist $X = C(K)$ mit üblicher Multiplikation eine (kommutative) Banachalgebra.