PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I: FUNKTIONALANALYTISCHE METHODEN

BÁLINT FARKAS, MATTHIAS GEISSERT

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung

ToDO
Wir möchten uns recht herzlich bei allen Stundenten bedanken, die mitgeholfen haben, dieses Skript zu erstellen. Insbesondere möchten wir uns bei Tobias Hansel und Bettina Schieche für das Korrekturlesen des Skripts und zahlreiche Verbesserungsvorschläge bedanken.

1. Einführung in die Problematik

1.1. **Physikalische Motivation.** Betrachte einen Stab aus Metall mit gegebener Temperaturverteilung. Nun wollen wir untersuchen wie die Wärme geleitet wird.

Annahmen: Stab (isoliert) wird parametrisiert durch das Intervall $[0, 1]$, $u(t, x)$ =Temperatur in x zum Zeitpunkt t.

Konstanten: ρ Dichte, c spezifische Wärme

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Wärmequelle

Energie in Segment $[x_1, x_2]$: $E(x_2, x_1, t) \approx c\rho(x_2 - x_1)u(t, x_1)$

Wärmeleitungsregel von Fourier: Sei $Q(t, x)$ = die Wärme durch Punkt x zum Zeit t

$$\frac{Q(t_2, x) - Q(t_1, x)}{t_2 - t_1} \approx -K_0 \frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x) \qquad K_0 \text{ Thermale Konduktivität}$$

Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} &c\rho(x_2 - x_1)(u(t_2, x_1) - u(t_1, x_1)) \\ &= (t_2 - t_1)(x_2 - x_1)f(x_1) - K_0(t_2 - t_1)\Big(\frac{\partial}{\partial x}u(t_1, x_1) - \frac{\partial}{\partial x}u(t_1, x_2)\Big). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{u(t_2, x_1) - u(t_1, x_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho} \frac{\frac{\partial}{\partial x}u(t_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x}u(t_1, x_1)}{x_2 - x_1}$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t, x) = \frac{f(x)}{c\rho} + \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x),$$

wobei $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$ die thermische Diffusivität (eine Konstante) ist.

Stationäre Temperaturverteilung (Gleichgewicht, steady state):

$$(1)\quad 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t, x) \Longrightarrow u(t, x) = v(x) 0 = f(x) + \Delta v(x) \Longrightarrow \Delta u(x) = -f(x).$$

1.2. **Mathematische Problemstellung.** Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

Gegeben: stetige Funktion g auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω.

Gesucht: stetige Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, in Ω zweimal differenzierbar mit

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) &= f(x) \qquad \forall x \in \Omega \\ \qquad\qquad u(x) &= g(x) \qquad \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Anwendung: Potential eines Ladungsfreies elektrisches Feldes.

u stationäre Temperaturverteilung

Bemerkung 1.1. *(a) Δ ist ein linearer Operator $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$. Sei $X := \{h : h \in C^2(\overline{\Omega}),\ h\big|_{\partial\Omega} = 0\}$, Die Menge X bildet einen Vektorraum. Finde Lösung von $\Delta u = f$ wie für Matrizen $\to$ "Diagonalisierung".*

(b) Um die Wärmeleitungsgleichung (1) *zu lösen definiere "$u(t,x) = e^{\Delta t}$".*

Stationäres Problem:
Umformulierung in ein äquivalentes Problem, welches (funktional)analytischer Behandlung zugänglich ist. Einfachheitshalber sei $n = 1$ und $\Omega = [a,b]$.

Sei u eine Lösung von (2) und $\varphi \in C_0^1(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in C^1(\overline{\Omega}), \varphi\big|_{\partial\Omega} = 0\}$.

$$0 = \int_\Omega (f - u'')\varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega (f\varphi + u'\varphi') \,\mathrm{d}x - \underbrace{(u'\varphi)(b) - (u'\varphi)(a)}_{=0}.$$

Die Gleichung

$$\text{(SF)} \qquad \int_\Omega (u'\varphi' + f\varphi) \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\overline{\Omega})$$

nennt man die *schwache Formulierung* des (2).

Umgekehrt: sei $u \in C^2(\Omega)$ Lösung der schwachen Formulierung:

$$\int_\Omega (f - \Delta u)\varphi \,\mathrm{d}x = 0$$

$\Longrightarrow \Delta u = f$ in Ω.

Lemma 1.2. *Für $u \in C^2(\Omega)$ ist* (2) *äquivalent zu* (SF).

Wie erhalte ich die Lösung?

Seien $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Definiere

$$\begin{aligned} a(u,v) &:= \int_\Omega u'v' \,\mathrm{d}x \\ b(u) &:= \int_\Omega fu \,\mathrm{d}x \\ j(u) &:= \tfrac{1}{2}a(u,u) + b(u) \quad \textit{“Energiefunktional”} \end{aligned}$$

Setze $M := \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u\big|_{\partial\Omega} = g\}$.

Lemma 1.3. *$u \in M$ löst* (SF) $\iff$ *u Minimalstelle des Funktionals $j : M \to \mathbb{R}$ ist.*

Proof. “$\Rightarrow$”: Sei $u \in M$ schwache Lösung von (2). Daher $a(u,\varphi) + b(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_0^1(\overline{\Omega})$. Sei $v \in M$ und setze $\varphi := v - u$.

$$\begin{aligned} j(v) &= \tfrac{1}{2}a(u+\varphi, u+\varphi) + b(u+\varphi) \\ &= \tfrac{1}{2}a(u,u) + \tfrac{1}{2}a(\varphi,\varphi) + a(u,\varphi) + b(u) + b(\varphi) \\ &= j(u) + \underbrace{\tfrac{1}{2}a(\varphi,\varphi)}_{\geq 0} + \underbrace{a(u,\varphi) + b(\varphi)}_{=0} \geq j(u). \end{aligned}$$

“$\Leftarrow$”: Sei u Minimalstelle von $j : M \to \mathbb{R}$. Für alle $\varphi \in C_0^1(\overline{\Omega})$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt $u + \varepsilon\varphi \in M$. So folgt

$$j(u + \varepsilon\varphi) \geq j(u) \quad \text{für alle } \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Daher

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} j(u+\varepsilon\varphi)\big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left[\tfrac{1}{2}a(u,u) + \varepsilon a(u,\varphi) + \tfrac{\varepsilon^2}{2}a(\varphi,\varphi) + b(u) + \varepsilon b(\varphi)\right]\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= a(u,\varphi) + b(\varphi). \end{aligned}$$

□

Man nennt $0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} j(u+\varepsilon\varphi)\big|_{\varepsilon=0} = a(u,\varphi) + b(\varphi)$ die *Variationsgleichung* von j.

Wie zeigt man, dass das Energiefunktional $j : M \to \mathbb{R}$ ein Minimalstelle hat?

Historie: Riemann (1851): Existenz ist evident.

Weierstraß (1869): Beispiel von Minimumproblem ohne Lösung
vernichtende Kritik
$\longrightarrow$ Suche nach alternative Methoden
(Integralgleichungen, Methoden von Poincarè usw.)

Hilbert (1900): “rettet” das in Grundidee so einfache Dirichletsche Prinzip

Existenz einer Minimumstelle?

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$, $j : M \to \mathbb{R}$, j nimmt Infimum an, falls

(i) j stetig

$\left.\begin{array}{l}\text{(ii) } M \text{ abgeschlossen} \\ \text{(iii) } M \text{ beschränkt}\end{array}\right\}$ kompakt

ersetze obige Bedingung (iii) durch

(iii') $\lim\limits_{|x|\to\infty} j(x) = +\infty$.

Zum Beispiel ist (iii') erfüllt, wenn

(iii") $j(x) \geq c_1|x|^p - x_2$, $x \in \mathbb{R}$

Wir versuchen nun die Bedingungen (i), (ii), (iii") auf (2) zu übertragen. $C^1(\overline{\Omega})$ ist ein Funktionraum (Vektorraum).

Problem 1.4. *Finde Norm $\|\cdot\|$ bezüglich derer (i), (ii), und (iii") gilt, d.h. $\|\cdot\| : C^1(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}_+$ mit*

(a) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$
(b) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$, $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $\alpha \in \mathbb{R}$
(c) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

1. Versuch: C^1-Norm

$$\|u\|_{C^1} := \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| + \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u'(x)|$$

Dann ist M abgeschlossen in $C^1(\overline{\Omega})$, j ist stetig bezüglich $\|\cdot\|_{C^1} \Longrightarrow$ i) und ii).

Aber iii") ist unmöglich! Eine iii") erfüllende Norm müsste Energiefunktional "ähnlich" sein. Betrachte zum Beispiel $[a, b] = [0, 1]$ und eine differenzierbare Funktion $0 \leq f$, $\max|f(x)| = 1$, welche auf $[1/2, +\infty)$ verschwindet. Definiere $u_n(x) := c_n f(nx)/n$, wobei c_n eine Konstante ist, so dass $\int_0^1 |u_n'|^2 = 1$. Dann $c_n \to \infty$ und $\max|u_n| \leq K$, $\max|u_n'| = c_n \max|f'| \to \infty$.

2. Versuch: (Sei jetzt einfachheitshalber $g = 0$.) Integralnorm

$$\|u\| = \Big(\int\limits_{\Omega} u^2 \,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega} |u'|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}$$

Jetzt kann man $j(u)$ abschätzen

$$\begin{aligned} j(u) &= \tfrac{1}{2}\int\limits_\Omega u'^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_\Omega fu\,\mathrm{d}x \geq \tfrac{1}{2}\int\limits_\Omega u'^2\,\mathrm{d}x - \int\limits_\Omega |fu|\,\mathrm{d}x \\ &\geq \tfrac{1}{2}\int\limits_\Omega u'^2\,\mathrm{d}x - \varepsilon\int\limits_\Omega u^2\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Omega f^2\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\int\limits_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x \leq c\int\limits_\Omega |u'|^2\,\mathrm{d}x,$$

denn

$$\begin{aligned} u(b)-u(x) = \int\limits_x^b u' \quad &\overset{u(b)=0}{\Longrightarrow} \quad |u(x)| \leq \int\limits_a^b |u'| \\ \Longrightarrow \quad & |u(x)|^2 \leq \Big(\int\limits_a^b |u'|\Big)^2 \leq (b-a)\int\limits_a^b |u'|^2 \\ \Longrightarrow & \int\limits_a^b |u(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq (b-a)^2\Big(\int\limits_a^b |u'|\Big)^2. \end{aligned}$$

Also

$$j(u) \geq C\|u\|^2 - k,$$

d.h. es gilt iii”).

Aber: $C^1(\overline{\Omega})$ versehen mit Integralnorm ist *nicht* vollständig! Vollständigkeit ist aber unverzichtbar!

Ausweg: Übergang zu “größerem” Funktionraum: Vervollständigung von $C^1(\overline{\Omega})$ bezüglich $\|\cdot\|$.

$\longrightarrow$ *Sobolev Räume*.

Dann lässt sich (2) lösen.

Stichwörter

- Unendlichdimensionale Vektorräume
- Kompaktheit
- Stetigkeit
- Lineare Operatoren
- "Diagonalisierung"

2. Normierte Vektorräume

Im folgenden sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 2.1. *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.*

(a) *Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ heißt* Halbnorm *auf X falls*
  [(N1)]
  (i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für $x, y \in X$ (Dreiecksungleichung)
  (ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ für $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ (Homogenität)
  gelten.

(b) *Eine Halbnorm $\|\cdot\| \to \mathbb{R}$ heißt* Norm *auf X, falls zusätzlich*
  [(N1)]
  (i) $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ (Definitheit)
  gilt.

Beispiel 2.2. *$\mathbb{R}^d$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_d)$*

$$\|x\|_2 := \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\Big)^{1/2}$$

(N3) und (N2) sind klar. Zum Beweis von (N1) betrachte die Funktion

$$p(\lambda) := \sum_{i=1}^d (x_i - \lambda y_i)^2 = \sum_{i=1}^d x_i - 2\lambda \sum_{i=1}^d x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^d y_i^2.$$

Dann ist $p \geq 0$ eine Polynom zweiten Grades. Daher kann es die x-Achse in höchstens einem Punkt berühren, d.h. die Diskriminante ($b^2 - 4ac$) *ist negativ oder* 0*:*

$$\Big(2\sum_{i=1}^d x_i y_i\Big)^2 - 4\sum_{i=1}^d x_i^2 \sum_{i=1}^d y_i^2 \leq \Big(2\sum_{i=1}^d x_i y_i\Big)^2 \leq 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^d x_i y_i \leq \Big(\sum_{i=1}^d x_i^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^d y_i^2\Big)^{1/2} = \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Die letzte Ungleichung heißt Cauchy–Bunyakovsky–Schwartzsche Ungleichung. *Ferner gilt*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^2 \leq& \sum_{i=1}^d |x_i + y_i||x_i| + \sum_{i=1}^d |x_i + y_i||y_i| \\ =& \Big(\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^2 \sum_{i=1}^d |x_i|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^2 \sum_{i=1}^d |y_i|^2\Big)^{1/2} \\ =& \Big(\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^2\Big)^{1/2} (\|x\|_2 + \|y\|_2),\end{aligned}$$

also folgt die Dreiecksungleichung.

Bemerkung 2.3. *(a) Sei p Halbnorm auf X. Dann gelten*
- *(i) $p(x) \geq 0$ für alle $x \in X$ und $p(0) = 0$.*
- *(ii) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ für alle $x, y \in X$.*

(b) Sei $\|\cdot\|$ Norm auf X. Dann definiert $d(x, y) := \|x - y\| \quad (x, y \in X)$ eine Metrik auf X.

Bemerkung 2.4 (Eigenschaften normierter Räume)**.** *Sei X ein normierter Raum. Dann gilt:*
- *(a) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$, $x, y \in X$*
- *(b) $(x_n), (y_n) \subset X$ mit $x_n \to x$, $y_n \to y \Longrightarrow x_n + y_n \to x + y$*
- *(c) $(x_n) \subset X$, $(\alpha_n) \subset \mathbb{K}$ mit $x_n \to x$, $\alpha_n \to \alpha \Longrightarrow \alpha_n x_n \to \alpha x$*
- *(d) $(x_n) \subset X$ mit $x_n \to x \Longrightarrow \|x_n\| \to \|x\|$*

Definition 2.5.
- *(a) Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf X. Dann heißt das Paar $(X, \|\cdot\|)$* normierter Raum.
- *(b) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum (oder (X, d) ein metrischer Raum). Eine Folge $(x_n) \subseteq X$ heißt* Cauchyfolge, *falls für alle $\varepsilon > 0$ es ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$ (oder $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$) gilt für alle $n, m \geq N$.*

(c) *Eine Folge* $(x_n) \subset X$ *heißt* konvergent *gegen* x*, falls* $\|x - x_n\| \to 0$ *(oder* $d(x, x_n) \to 0$*).*
(d) *Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchyfolge konvergiert heißt,* vollständig. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum.*

Bemerkung 2.6. *(a) Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *ein Banachraum und* $E \subseteq X$ *ein Unterraum. Der Raum* E *ist vollständig genau dann wenn* E *abgeschlossen ist.*
(b) Eine Cauchyfolge ist immer beschränkt.
(c) Eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge besitzt ist konvergent.

Beispiel 2.7. *(a)* $\mathbb{R}^d$ *versehen mit*

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \quad \|x\|_2 := \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\Big)^{1/2} \text{ oder } \|x\|_\infty := \max_{1\le i\le d} |x_i|$$

ist ein Banachraum.
(b) ***Räume beschränkter Folgen***
ℓ^∞*: Raum aller beschränkten Folgen:*

$$\ell^\infty := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}.$$

c*: Raum aller konvergenten Folgen:*

$$c := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \text{ ist konvergent}\},$$

c_0*: Raum aller Nullfolgen:*

$$c_0 := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \to 0\}$$

Dann gilt $c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty$*. Versehen mit* $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ *sind alle Banachräume.*
(c) ***Räume stetiger Funktionen***
Sei $\emptyset \neq K$ *eine kompakte Menge in* $\mathbb{R}^d$*. Betrachte*

$$C(K) := \{f : K \to \mathbb{K} \text{ stetig}\} \quad \text{wobei} \quad \|f\|_\infty := \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

Dann ist $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ *ein Banachraum. Wir definieren* $C(K, \mathbb{K}^d)$*, den Raum von* $\mathbb{K}^d$*-wertigen, stetigen Funktionen.*
(d) ***Räume beschränkter/stetiger Funktionen*** *Sei* $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *eine beliebige Borelmenge. Betrachte die folgende Vektorräume*

$$\begin{aligned} F_b(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ beschränkt}\},\\ M_b(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ beschränkt und Borel messbar}\},\\ C_b(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ beschränkt und stetig}\},\\ BUC(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ beschränkt und gleichmäßig stetig}\},\\ C_c(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ stetig und } \operatorname{supp} f \text{ ist kompakt}\}. \end{aligned}$$

Es gilt $C_c(\Omega) \subseteq BUC(\Omega) \subseteq C_b(\Omega) \subseteq M_b(\Omega) \subseteq F_b(\Omega)$. Versehen mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|,$$

sind $BUC(\Omega)$, $C_b(\Omega)$, $M_b(\Omega)$ und $F_b(\Omega)$ Banachräume. $C_c(\Omega)$ ist vollständig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ genau dann wenn Ω kompakt ist. Die Vervollständigung (Abschluss) von $C_c(\Omega)$ wird mit $C_0(\Omega)$ bezeichnet und ist natürlich in $BUC(\Omega)$ enthalten.

(e) ***Holomorphe Funktionen***
Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und betrachte den Raum

$$H^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ beschränkt und holomorph}\}.$$

Versehen mit der Supremumsnorm ist $H^\infty(\Omega)$ ein Banachraum, denn er ist ein abgeschlossener Unterraum von $C_b(\Omega)$.

(f) ***Summierbare Folgen***
Sei $1 \leq p < \infty$. Betrachte den Raum

$$\ell^p := \Big\{(a_n) : \ (a_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N}, \ \sum_{n=1}^\infty |a_n|^p < +\infty\Big\},$$

$$\text{und die Norm } \|(a_n)\|_p := \Big(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p\Big)^{1/p}.$$

Dann ist $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.

Proof. (a) ÜA.

(b) Der Fall ℓ^∞ ist ein ÜA.

Die Vektorräume c und c_0 sind abgeschlossen in ℓ^∞. Wir zeigen nur den Fall c_0. Sei $(a_n)^k \in c_0$, so dass $(a_n)^k \to (b_n) \in \ell^\infty$ für $k \to \infty$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned}|b_n| \leq |b_n - a_n^k| + |a_n^k| &\leq \|(b_n) - (a_n)^k\|_\infty + |a_n^k| \\ &\leq \varepsilon + |a_n^k|, \quad n \geq n_0, \ k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Für festes $n \geq n_0$ und hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n^k| \leq \varepsilon$. Also $|b_n| \leq 2\varepsilon$ für $n \geq n_0$.

(c) Klar: $\|\cdot\|$ ist eine Norm.
Beh.: $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.
Sei $(f_n) \subseteq C(K)$ eine Cauchyfolge. Da $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$, ist $(f_n(x)) \in \mathbb{K}$ eine Cauchyfolge, und daher ist die Folge $(f_n(x))$ konvergent. Bezeichne den Limes mit $g(x)$.
Beh.: $g \in C(K)$ und $\|f_n - g\|_\infty \to 0$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in K$ $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$. Lasse nun $n \to \infty$, und so $|g(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in K$ und $n \geq N$. Dies zeigt $f_n \overset{\|\cdot\|}{\to} g$, und daher muss auch g stetig auf K sein, denn der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist stetig.

(d) ohne Beweis.
(e) siehe Funktionentheorie.
(f) Beweis im Falle $p = 1$ (der Fall $p \neq 1$ ist eine ÜA):
Beh.: $\|\cdot\|_1$ ist eine Norm.
Es gilt:

$$\|(a_n) + (b_n)\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$
$$= \|(a_n)\|_1 + \|(b_n)\|_1.$$

Die anderen Eigenschaften einer Norm sind auch klar.
Beh.: $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ist vollständig.
Sei $(a_n)^k \subseteq \ell^1$ eine Cauchyfolge. Es gilt $|a_n^k - a_n^m| \leq \|(a_n)^k - (a_n)^m\|_1$, d.h. $(a_n^k) \in \mathbb{K}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Daher ist sie auch konvergent: $a_n^k \to b_n$ für $k \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\|(a_n)^k - (a_n)^m\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^k - a_n^m| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } k, m \geq N.$$

Da (a_n) eine CF ist, existiert ein $K \in \mathbb{R}$ mit $\|(a_n)\|_1 \leq K$, $n \in \mathbb{N}$. Sei $l \in \mathbb{N}$ beliebig und wähle m groß genug, so dass

$$\sum_{n=1}^{l} |b_n| \leq \sum_{n=1}^{l} |b_n - a_n^m| + \sum_{n=1}^{l} |a_n^m| \leq \sum_{n=1}^{l} |b_n - a_n^m| + \|(a_n)\|_1$$
$$\leq \sum_{n=1}^{l} |b_n - a_n^m| + K \leq \varepsilon + K.$$

Also $(b_n) \in \ell^1$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $\|(a_n) - (a_k)\|_1 \leq \varepsilon/2$, $n \geq k$. Dann gilt für $l \in \mathbb{N}$ groß genug (abhängig von k)

$$\sum_{n=l}^{\infty} |a_n^m| \leq \sum_{n=l}^{\infty} |a_n^k - a_n^m| + \sum_{n=l}^{\infty} |a_n^k| \leq \varepsilon, \quad m \geq k.$$

Sei nun $l \in \mathbb{N}$ noch größer, damit auch $\sum_{n=l}^{\infty} |b_n| \leq \varepsilon$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - a_n^m| = \sum_{n=1}^{l-1} |b_n - a_n^m| + \sum_{n=l}^{\infty} |b_n - a_n^m|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{l-1} |b_n - a_n^m| + \sum_{n=l}^{\infty} |b_n| + \sum_{n=l}^{\infty} |a_n^m|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{l-1} |b_n - a_n^m| + 2\varepsilon.$$

Da $a_1^m, a_2^m, \ldots, a_{l-1}^m \to b_1, b_2 \ldots, b_{l-1}$ folgt $\|(b_n) - (a_n)^m\|_1 \to 0$ für $m \to \infty$.

□

Definition 2.8. *Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf einem Vektorraum X heißen* äquivalent, *falls $c, C > 0$ existieren mit*

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \quad \textit{for all } x \in X.$$

Bemerkung 2.9.

(a) *Seien $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen auf X. Dann sind äquivalent*
 (i) *$\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ sind äquivalent*
 (ii) *Eine Folge $(x_n) \subset X$ konvergiert gegen x bezüglich $\|\cdot\| \iff (x_n)$ konvergiert gegen x bezüglich $|||\cdot|||$*
 (iii) *Eine Folge $(x_n) \subset X$ ist Nullfolge bezüglich $\|\cdot\| \iff (x_n)$ ist Nullfolge bezüglich $|||\cdot|||$*

(b) *Geometrische Bedeutung vom Definition 2.8:*

$$\{x \in X : \|x\| \leq \tfrac{1}{C}\} \subseteq \{x \in X : |||x||| \leq 1\} \subseteq \{x \in X : \|x\| \leq \tfrac{1}{c}\}.$$

Topologische Bedeutung: die zwei Normen bestimmen dieselbe Topologie.

(c) *Auf $X := C([0,1])$ sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ nicht äquivalent.*

(d) *Sei $\alpha > 0$ und*

$$\|f\|_\alpha := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|e^{-\alpha t} \quad f \in C([0,1]).$$

Auf $C([0,1])$ sind $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_\alpha$ äquivalent.

Proof. (a) (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sind klar.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Annahme: es existiert kein $C > 0$ mit $|||x||| \leq C\|x\|$ für alle $x \in X$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert $x_n \in X$ mit $|||x_n||| \geq n\|x_n\|$. Sei $y_n := \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. Dann konvergiert $y_n \to 0$, aber $|||y_n||| \geq 1$: ein Widerspruch. Die Existenz von c beweist man analog.

(b) Klar.

(c) Sei $f_n(x) = x^n$. Dann gilt

$$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

d.h $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$, aber $\|f_n\|_\infty = 1$.

(d) Klar.

□

Satz 2.10. *Auf einem endlichdimensionalen Raum sind je zwei Normen äquivalent.*

Proof. Ohne Beweis. □

Satz 2.11. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum. Dann ist X vollständig $\iff$ jede absolut konvergente Reihe konvergiert, d.h. für alle $(x_n) \subseteq X$ mit $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < +\infty$ existiert ein $x \in X$ mit $\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^m x_n - x \right\| = 0$.*

Proof. “$\Rightarrow$”: Da $\left(\sum_{n=1}^m x_n\right)_m$ eine Cauchyfolge ist, folgt die Behauptung.

“$\Leftarrow$”: Sei $(x_n) \subseteq X$ eine Cauchyfolge. Zu $\varepsilon_k := 2^{-k}$ wähle $N_k \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k}$ falls $n, m \geq N_k$. Dann existiert es eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $y_k := x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$. Dann $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| < +\infty$. Nach Voraussetzung existiert es $y \in X$ mit

$$\left\|y - \sum_{k=1}^{m} y_k\right\| = \|y - (x_{n_{m+1}} - x_{n_1})\| \to 0 \quad \text{als } m \to \infty.$$

Eine Teilfolge von (x_n) konvergiert und (x_n) ist Cauchy Folge, also konvergiert auch (x_n). $\square$

2.1. **Elementare Konstruktionen – Summen und Quotienten.**

Definition und Satz 2.12.

(a) Seien $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, |||\cdot|||)$ isometrisch isomorphe *normierte Vektorräume, d.h. es existiert ein linearer (algebraischer) Isomorphismus* J *zwischen* X *und* Y*, welcher auch eine Isometrie ist:* $|||Jx||| = \|x\|$. *Dann ist* X *vollständig genau wenn* Y *vollständig ist.*

(b) Seien X, Y *normierte Vektorräume und* $1 \leq p \leq \infty$. *Dann definiert*

$$\|(x,y)\|_p := \begin{cases} \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \max\{\|x\|, \|y\|\} & p = \infty. \end{cases}$$

eine Norm auf $X \times Y$. *Das Paar* $(X \times Y, \|(\cdot,\cdot)\|_p)$ *wird mit* $X \underset{p}{\oplus} Y$ *bezeichnet.*

(i) Die Normen $\|(\cdot,\cdot)\|_p$ *sind alle äquivalent auf* $X \times Y$.

(ii) Sind X, Y *vollständig, folgt die Vollständigkeit von* $X \oplus_p Y$ *auch.*

(c) Sei X *normierter Vektorraum und* $A \subseteq X$. *Der* Abstand *von einem* $x \in X$ *zu* A *ist definiert durch*

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{\|x - y\| : y \in A\}.$$

$\operatorname{dist}(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$

(d) Sei X *normierter Vektorraum,* $E \subseteq X$ *abgeschlossener Unterraum. Sei* $\hat{x} := x + E \in X/E$. *Dann definiert* $\|\hat{x}\| := \operatorname{dist}(x, E)$ *eine Norm auf* X/E.

Proof. (a), (b) ÜA.
(d) Wohldefiniert: Sei $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$, also $x_1 = x_2 + y$ mit $y \in E$. Dann gilt $\operatorname{dist}(x_1, E) = \operatorname{dist}(x_2, E)$.

Definitheit: $\|\hat{x}\| = 0 \iff \operatorname{dist}(x, E) = 0 \iff x \in \overline{E} = E \implies \hat{x} = 0$.
Homogenität: klar. Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\|\hat{x} + \hat{y}\| &= \inf_{z \in E} \|x + y + z\| = \inf_{z_1, z_2 \in E} \|x + y + z_1 + z_2\| \\ &\le \inf_{z_1, z_2 \in E} \|x + z_1\| + \|y + z_2\| \\ &= \inf_{z_1 \in E} \|x + z_1\| + \inf_{z_2 \in E} \|y + z_2\| = \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|.\end{aligned}$$

□

Beispiel 2.13.

(a) $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p) \underset{p}{\oplus} (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p) \simeq (\mathbb{R}^{d+m}, \|\cdot\|_p)$

(b) $C([0,1]) \underset{\infty}{\oplus} C([0,1]) \simeq C([0,1], \mathbb{K}^2)$

(c) Es sei $a \le \alpha < \beta \le b$ *und*

$$E := \{f \in C([a,b]) : \ f(s) = 0 \text{ für alle } s \in [\alpha, \beta]\}.$$

E ist ein abgeschlossener Unterraum von $C([a,b])$. Der Quotient $C([a,b])/E$ ist isometrisch isomorph zu $C([\alpha, \beta])$.

Satz 2.14. *Sei X Banachraum und E abgeschlossener Unterraum. Dann ist X/E ein Banachraum.*

Proof. Sei $x_n \in X$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{x}_n\| < +\infty$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen $\|x_n\| \le \|\hat{x}_n\| + 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ und nach Voraussetzung existiert $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Daher

$$\left\|\hat{x} - \sum_{n=1}^{m} \hat{x}_n\right\| = \left\|\widehat{x - \sum_{n=1}^{m} x_n}\right\| \le \left\|x - \sum_{n=1}^{m} x_n\right\| \to 0 \quad \text{für } m \to \infty.$$

Die Behauptung folgt aus Satz 2.11. □

Definition 2.15. *Ein metrischer Raum X heißt* separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge A besitzt. Hierbei heißt A* dicht *in X, falls für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in X$ ein $a \in A$ existiert mit $d(a,x) \le \varepsilon$.*

Satz 2.16. *Ist X separabel, dann ist jede Teilmenge $A \subseteq X$ auch separabel.*

Beispiel 2.17.

(a) $X = C([0,1])$ *ist separabel.*

(b) Sei $1 \le p < \infty$*, dann ist ℓ^p ist separabel. ℓ^∞ ist nicht separabel.*

Proof.

(a) Approximationssatz von Weierstraß: Polynome sind dicht in $C([0,1])$. Wähle Polynome mit rationellen Koeffizienten um eine abzählbare Menge zu erhalten.

(b) ÜA.

□

Definition 2.18. *Sei X ein normierter Vektorraum, welcher auch eine Algebra auf $\mathbb{K}$ ist, d.h. es ist eine assoziative Multiplikation zwischen den Elementen $a, b \in X$ definiert, so dass*
[(a)]

(a) $a, b \in X$, $\lambda \in K \implies (\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b)$
(b) $a, b, c \in X \implies (a+b)c = ac + bc$, $c(a+b) = ca + cb$

Ist $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ für alle $a, b \in X$, dann heißt dann X normierter Algebra. Ist ferner X vollständig, nennt man X Banachalgebra.

Beispiel 2.19. *Sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann ist $X = C(K)$ mit üblicher Multiplikation eine (kommutative) Banachalgebra.*

Satz 2.20 (Stone–Weierstraß)**.** *Sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Betrachte die Banachalgebra $C(K)$ sowie eine Teilalgebra $\mathscr{A} \subseteq C(K)$, so dass*

(a) $\mathbf{1} \in \mathscr{A}$;
(b) *Für alle $x, y \in K$ $x \neq y \implies$ existiert $f \in \mathscr{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$;*
(c) $f \in \mathscr{A} \implies \overline{f} \in \mathscr{A}$ *(im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).*

Dann ist $\mathscr{A}$ dicht in $C(K)$.

3. Kompaktheit

Definition 3.1. *Sei X ein metrischer Raum.*
[a)]

(a) *Eine Menge $K \subseteq X$ heißt* kompakt, *falls man für jede offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$, $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ eine endliche Teilüberdeckung findet, d.h. es existiert eine endliche Menge $J \subseteq I$ mit $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$.*
(b) *Ist der Abschluss $\overline{K}$ kompakt, dann heißt K* relativ kompakt.
(c) *Besitzt jede Folge $(x_n) \subseteq K$ eine konvergente Teilfolge mit Limes in K, dann heißt K* folgenkompakt.

Lemma 3.2. *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $X \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$ abgeschlossene Teilmengen. Dann gilt $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$. Konvergiert* $\operatorname{diam} F_n := \sup\{d(x,y) : x, y \in F_n\}$ *gegen 0, dann enthält der Durchschnitt nur einen Punkt.*

Proof. Wähle $x_n \in F_n$. Dann besitzt $(x_n) \subset X$ eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ für ein $x \in X$.
Beh.: $x \in F_n$, $n \in \mathbb{N}$
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_{n_k} \in F_n$ für $n_k \geq n$. Da F_n abgeschlossen ist, gilt $x \in F_n$.
Der Zusatz ist klar. □

Satz 3.3. *Ein folgenkompakter metrischer Raum (X, d) ist immer separabel.*

Proof. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv eine endliche Folge. Angenommen x_i^k $(i \leq n)$ ist bestimmt, dann betrachte die Menge

$$B := \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i^k, 1/2^k).$$

Falls $B = X$, wir setzen $n_k := n$, und die Rekursion ist beendet. Wäre $B \subsetneq X$, wähle $x_{n+1}^k \in X \setminus B$. Wir behaupten, dass die Rekursion immer in endlich vielen Schritten endet. Wäre dies nicht so, dann wäre $(x_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine (unendliche) Folge, welche keine konvergente Teilfolge besitzen würde (denn $\mathrm{d}(x_i^k,\, x_{i+1}^k) > 1/2^k$) : ein Widerspruch. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ betrachte die endliche Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^{n_k} B(x_i^k, 1/2^k)$. Die abzählbare Menge $\{x_i^k :\ 1 \leq i \leq n_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in X. Denn sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei k so groß, dass $1/2^k \leq \varepsilon$. Dann existiert ein x_i^k mit $a \in B(x_i^k, 1/2^k)$, also folgt die Behauptung. □

Satz 3.4. *Sei X ein metrischer Raum. Dann sind die Begriffe folgenkompakt und kompakt äquivalent.*

Proof. Sei $K \subseteq X$ folgenkompakt, $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine offene Überdeckung, und setze $U := \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$. Erstmal zeigen wir die Existenz einer abzählbaren Teilüberdeckung. Sei $A \subseteq K$ eine abzählbare, dichte Menge in K. Betrachte die Menge

$$J := \{(x, r) :\ x \in A,\ r \in \mathbb{Q}_+,\ B(x, r) \subseteq U_\alpha \text{ für ein } \alpha \in I\},$$

welche immer noch abzählbar ist. Für $(x, r) \in J$ wähle eine Menge $U_{\alpha(x,r)}$ mit $B(x, r) \subseteq U_{\alpha(x,r)}$.
Beh.: $K \subseteq \bigcup_{(x,r)\in J} U_{\alpha(x,r)}$.
Sei $y \in K$, dann gilt $y \in U_\alpha$ für ein $\alpha \in I$, also existiert $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ mit $B(y, r) \subseteq U_\alpha$. Wegen der Dichtheit gibt es $x \in A$ mit $x \in B(y, r/4)$, und so gilt $y \in B(x, r/2) \subseteq B(y, r) \subseteq U_\alpha$. Dies zeigt $y \in U_{\alpha(x,r/2)}$.

Wir können jetzt annehmen, dass $I = \mathbb{N}$. Nehmen wir an, dass keine endliche Teilüberdeckung existiert. Das heißt für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $x_n \in K \setminus \bigcup_{k=1}^{n} U_k$. Nach Voraussetzung hat (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_n'), $x_n' \to x \in K$. Aber dann kann x nicht in $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ liegen: ein Widerspruch.

Umgekehrt: Sei K kompakt und $(x_n) \subseteq K$ eine Folge. Für jedes $y \in K$ betrachte die Kugel $B(y, 1)$, so ist $\bigcup_{y\in K} B(y, 1)$ eine offene Überdeckung. Nach Voraussetzung existiert eine endliche Teilüberdeckung $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(y_i, 1)$. Dann sind für ein $1 \leq i \leq k$ unendlich viele x_n^1 in $B(y_i, 1)$, setze $y^1 := y_i$. Betrachte nun diese Teilfolge und wiederhole die ganze Prozedur rekursiv mit $B(y, 1/2^m)$ um eine Teilfolge (x_n^m) sowie $y^m \in K$ zu erhalten $(m \in \mathbb{N})$. Dann ist (x_m^m) eine Teilfolge von (x_n). Betrachte $F_m := \bigcap_{k=1}^{m} \overline{B(y^k, 1/2^k)}$. Für F_m gelten die Bedingungen von Lemma 3.2, also $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m = \{x\}$. Es ist leicht $x_m^m \to x$ zu zeigen.

□

Satz 3.5. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$. K ist kompakt genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.*

Proof. Sei K kompakt und $K \ni x_n \to x$. Es ist $x \in K$ zu zeigen. Da K folgenkompakt ist, hat (x_n) eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to y \in K$,aber dann muss $y = x$ sein. Also gilt $x \in K$. Wäre K unbeschränkt, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $|x_n| \geq n$, also würde (x_n) keine konvergente Teilfolge besitzen, ein Widerspruch.

Umgekehrt: Sei K beschränkt und abgeschlossen. Sei $(x_n) \in K$ eine Folge. Dann sind die Koordinatenfolgen $(x_n^i) \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, d)$ auch beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß findet man eine Teilfolge (x_{n_k}) so, dass $x_{n_k}^i \to x^i$, falls $k \to \infty$ $(i = 1, \dots, d)$. Dass heißt aber auch $x_{n_k} \to x$, und wegen der Abgeschlossenheit gilt $x \in K$. □

Satz 3.6. *Sei $K \subseteq X$, wobei X ein normierter Vektorraum ist. Ist K kompakt, so auch beschränkt und abgeschlossen.*

Proof. Siehe Beweis von Satz 3.5. □

Lemma 3.7 (Rieszsches Lemma)**.** *Sei X ein normierter Vektorraum und Y ein abgeschlossener Unterraum, $Y \neq X$. Ferner sei $0 < \delta < 1$. Dann existiert ein $x_\delta \in X$ mit $\|x_\delta\| = 1$ und*

$$\|x_\delta - y\| > 1 - \delta \qquad \textit{für alle } y \in Y.$$

Proof. Sei $x \notin Y$ und setze $d := \operatorname{dist}(x, Y)$. Dann $d > 0$, denn Y ist abgeschlossen. Es gilt natürlich $d < d/(1-\delta)$, also existiert $y_\delta \in Y$ mit $\|x - y_\delta\| < d/(1-\delta)$. Nun setze $x_\delta := (x - y_\delta)/\|x - y_\delta\|$. Dann $\|x_\delta\| = 1$, und für alle $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} \|x_\delta - y\| &= \left\| \tfrac{x}{\|x-y_\delta\|} - \tfrac{y_\delta}{\|x-y_\delta\|} - y \right\| = \tfrac{1}{\|x-y_\delta\|} \left\| x - (y_\delta + \|x - y_\delta\| y) \right\| \\ &\geq \tfrac{d}{\|x-y_\delta\|} > \tfrac{1-\delta}{d} \cdot d = 1 - \delta. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.8. *Sei X ein normierter Vektorraum. Äquivalent sind:*
[i)]

(a) $\dim X < \infty$
(b) $\overline{B_X(0,1)}$ *ist kompakt*
(c) *Jede beschränkte Folge $(x_n) \subseteq X$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Proof. i) $\Rightarrow$ ii): Trivial.

ii) $\Rightarrow$ iii): Siehe Satz 3.4.

iii) $\Rightarrow$ i): Folgt aus Rieszschem Lemma. □

Deswegen ist es interessant Charakterisierungen der Kompaktheit in verschiedenen Räumen zu untersuchen.

Theorem 3.9 (Arzelà–Ascoli)**.** *Sei (K,d) ein nicht leerer, kompakter metrischer Raum. Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq C(K)$ ist kompakt in $C(K)$ genau dann, wenn sie*

(a) abgeschlossen,
(b) beschränkt und
(c) gleichmäßig gleichgradig stetig ist, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit: Für alle $x, y \in K$ mit $d(x,y) < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$.

Proof. Notwendigkeit: (a) und (b) folgen aus Satz 3.6.
Sei $\varepsilon > 0$ und $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} B(f,\varepsilon)$ eine offene Überdeckung. Wegen der Kompaktheit erhalten wir $f_1, f_2, \ldots, f_n$ mit $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(f_i,\varepsilon)$. Da K kompakt ist, sind f_i, $i = 1, \ldots, n$ gleichmäßig gleichgradig stetig, d.h.,

$$\exists \delta > 0 : |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n, \; d(x,y) < \delta.$$

Nun sei $f \in \mathcal{F}$ beliebig. Dann ist $f \in B(f_i, \varepsilon)$ für ein $1 \le i \le n$, und

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \le 3\varepsilon.$$

Die Bedingung ist hinreichend: Wir zeigen nun, dass $\mathcal{F}$ folgenkompakt ist. Sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge in K und $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ eine beliebige Folge. Da $\mathcal{F}$ beschränkt ist, existiert $(f_n^1) \subset (f_n)$ so, dass $(f_n^1(x_1))$ konvergiert. Wähle aus dieser Folge $(f_n^2) \subset (f_n^1)$ so, dass $(f_n^2(x_2))$ konvergiert, u.s.w.. Setze $g_n := f_n^n$. Dann ist (g_n) eine Teilfolge von f_n und $g_n(x_k)$ konvergiert für jedes $k \in \mathbb{N}$.
<u>Beh.</u>: (g_n) ist eine Cauchyfolge
Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ nach (c). Dann existieren x_{i_k}, $k = 1, \ldots, n$ mit $K \subset \cup_{k=1}^n B(x_{i_k}, \delta)$. Für $x \in K$ existiert daher $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $d(x_i, x) < \delta$. Da $(g_m(x_{i_k}))$ eine Cauchyfolge für $k = 1, \ldots, n$ ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, unabhängig von x, so dass für $m, n \ge n_0$

$$|g_m(x) - g_n(x)| \le |g_m(x) - g_m(x_i)| + |g_m(x_i) - g_n(x_i)| + |g_n(x_i) - g_n(x)| \le 3\varepsilon,$$

d.h (g_n) ist eine Cauchyfolge in $C(K)$. Wegen der Vollständigkeit existiert ein $g \in C(K)$ mit $\lim_{n\to\infty} g_n = g$, d.h $\mathcal{F}$ ist folgenkompakt. □

3.1. **Fixpunktsätze.**

Satz 3.10 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine strikte Kontraktion, d.h. es existiert ein $0 \le q < 1$ so, dass $d(Tx, Ty) \le q d(x,y)$ für alle $x, y \in X$. Dann besitzt T einen eindeutigen Fixpunkt.*

Proof. <u>Beh.</u>: Es existiert ein Fixpunkt.
Es gilt:

$$\begin{aligned} d(x,y) &\le d(x,Tx) + d(Tx,Ty) + d(Ty,y) \\ &\le d(x,Tx) + qd(x,y) + d(Ty,y), \quad x, y \in X. \end{aligned}$$

Damit folgt $d(x,y) \leq 1/(1-q)(d(x,Tx)+d(y,Ty))$, $x,y \in X$. Setze nun $x_n := T^n x$ für ein $x \in X$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $q^{n_0}/(1-q) \leq \varepsilon/2d(x,Tx)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leq \frac{1}{1-q}\left(d(x_n,x_{n+1})+d(x_m,x_{m+1})\right) \\ &\leq \frac{1}{1-q}\left(q^n d(x,Tx)+q^m d(x,Tx)\right) \leq \varepsilon, \quad n,m \geq n_0, \end{aligned}$$

d.h. (x_n) ist eine Cauchyfolge. Da X vollständig ist, existiert $\overline{x} \in X$ mit $d(\overline{x},x_n) \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Außerdem gilt nach Definition von (x_n)

$$d(\overline{x},T\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,T\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} d(Tx_n,T\overline{x}) \leq q \lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0.$$

<u>Beh.</u>: Der Fixpunkt ist eindeutig.
Sei $x,y \in X$ mit $Tx = x$ und $Ty = y$. Dann folgt:

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq qd(x,y),$$

d.h. $d(x,y) = 0$. □

Satz 3.11 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**.** *Betrachte die Kugel*

$$B := \overline{B(0,1)} \subseteq \mathbb{R}^d$$

und eine stetige Funktion $F : B \to B$. Dann besitzt F einen Fixpunkt.

Proof. Elementar, aber lang. □

Lemma 3.12. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine kompakte konvexe Menge. Dann gibt es eine stetige Funktion $R : \mathbb{R}^d \to K$ mit $R(x) = x$ für $x \in K$.*

Proof. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^d$, existiert ein eindeutig bestimmtes Element $y_0 \in K$ mit $\|x_0 - y_0\|_2 = \operatorname{dist}(x_0,K)$. Damit definieren wir die Abbildung

$$R : \mathbb{R}^d \to K, \ R(x_0) := y_0.$$

Wir zeigen nun die Stetigkeit von R. Sei $x_n \to x$. Da $R(x_n)$ in der kompakten Menge K liegt, existiert eine Teilfolge $(R(x_{n_k}))$ mit $R(x_{n_k}) \overset{k\to\infty}{\to} y$. Es gilt

$$\|x-y\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - R(x_{n_k})\| = \lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(x_{n_k},K) = \operatorname{dist}(x,K),$$

d.h. $R(x) = y$. □

Lemma 3.13. *Sei $\emptyset \neq K$ eine kompakte konvexe Menge in einem endlichdimensionalen normierten Raum, und sei $F : K \to K$ stetig. Dann besitzt F einen Fixpunkt.*

Proof. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $K \subseteq \mathbb{R}^d$ annehmen. Dann liegt K in einer Kugel $\overline{B(0,r)}$. Sei R die Funktion aus Lemma 3.12. Betrachte $G := F \circ R$, und wende auf G den Brouwersche Fixpunktsatz an. Sei x der Fixpunkt von G. Dann $x = G(x) = F(R(x))$, d.h. $x \in K$ und deswegen $R(x) = x$, also auch $F(x) = x$. □

Satz 3.14 (Fixpunktsatz von Schauder)**.** *Sei X ein normierter Vektorraum und $\emptyset \neq K \subseteq X$ kompakt und konvex. Sei $F : K \to K$ stetig. Dann besitzt F ein Fixpunkt.*

Proof. Wir verwenden den endlichdimensionalen Fall. Wegen Kompaktheit können wir K mit endlich vielen $B(x_i, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $x_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$ Kugeln überdecken. Definiere stetige Funktionen $f_i : K \to \mathbb{R}$ durch $f_i(x) = \max\{0, \varepsilon - \|x - x_i\|\}$, und setze $f(x) = \sum_{i=1}^n f_j(x)$. Wegen der Überdeckungseigenschaft gilt $f(x) > 0$ auf K, deshalb sind $g_j := f_j/f$ auch stetige Funktionen mit Werten in $[0,1]$. Es sei $Y := \mathrm{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$ und $K' := K \cap Y$. Für jedes $x \in K$ liegt $G(x) := \sum_{i=1}^n g_i(x) x_i$ in K' (Konvexität). Deshalb bildet die stetige Funktion $G \circ F$ die Menge K' in K' und besitzt nach Lemma 3.13 einen Fixpunkt x_ε. Es gilt dann

$$\|G(x) - x\| = \left\| \sum_{i=1}^n g_i(x) x_i - \sum_{i=1}^n g_i(x) x \right\| \leq \sum_{i=1}^n g_i(x) \|x_i - x\| \leq \varepsilon.$$

Daraus folgt $\|x_\varepsilon - F(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$. Betrachte $x_{1/n}$ und Wähle eine Teilfolge, für die $F(x_{1/n_k})$ konvergiert für $n_k \to \infty$, etwa gegen x (Kompaktheit). Nach Voraussetzung konvergiert x_{1/n_k} auch gegen x. Wegen der Stetigkeit erhalten wir $F(x) = x$. □

4. Lineare Operatoren

Im Folgenden seien X, Y, Z stets normierte Räumen über dem selben Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definition 4.1. *(a) Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt* linear*, falls*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y \qquad \forall x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

(b) Ist T linear, so heißt

$$\ker T := \{x \in X : Tx = 0\} \quad \text{der Kern von } T$$
$$\operatorname{im} T := \{y \in Y : \exists x \in X\ y = Tx\} \quad \text{das Bild von } T$$

(c) Lineare Abbildungen heißen (lineare) Operatoren.

Satz 4.2. *Sei $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Äquivalent sind*

(a) T ist stetig;
(b) T ist stetig in 0;
(c) T ist beschränkt*, d.h. $\exists\, M \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq M\|x\|$;*
(d) T ist gleichmäßig stetig.

Proof. Die Implikationen (a) ⇒ (b) und (d) ⇒ (a) sind trivial.

(b) ⇒ (c): Stetigkeit heißt insbesondere, dass ein $\delta > 0$ mit $TB_X(0, \delta) \subseteq B_Y(0, 1)$ existiert, also gilt $\|Tx\|_Y \leq 1$ für jedes $x \in B_X(0, \delta)$. Aus der Homogenität folgt $\|Tx\|_Y \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_X$ für alle $x \in X$.

(c) ⇒ (d): Sei $x \in X$. Nach Voraussetzung gilt $\|Tx - Ty\|_Y \leq M\|x - y\|_X$. Ist $\|x - y\|_X \leq \varepsilon/M$, folgt $\|Tx - Ty\|_Y \leq \varepsilon$, also die gleichmäßige Stetigkeit. □

Definition 4.3. *Sei $T : X \to Y$ beschränkt. Setze*

$$\|T\| := \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \,\forall x \in X\}.$$

Bemerkung 4.4. *(a)* $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$.

(b) $\|T\| = \sup_{x\neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|$.

Proof. Die Ungleichung $\sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|$ ist klar. Aber "<" kann nicht gelten, denn das wäre ein Widerspruch zu der Definition von $\|T\|$. Die anderen Aussagen sind trivial. □

(c) Bezeichnung: $\mathscr{L}(X,Y) := \{T : X \to Y,$ *linear und stetig*$\}$, $\mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X,X)$.
Mit den Operationen $(S+T)x := Sx + Tx$ *und* $(\alpha T)x := \alpha \cdot Tx$ *ist* $\mathscr{L}(X,Y)$ *ein Vektorraum.*

Satz 4.5. *(a)* $\|T\|$ *ist eine Norm auf* $\mathscr{L}(X,Y)$*, die so genannte* Operatornorm.

(b) Ist Y ein Banachraum, dann ist $\mathscr{L}(X,Y)$ auch ein Banachraum.

Proof. (a) Die Homogenität und die Dreiecksungleichung sind klar. Sei also $\|T\| = 0$. Dann $\|Tx\| \leq 0\|x\|$, also $\|Tx\| = 0$ und $T = 0$.

(b) Sei $(T_n) \subseteq \mathscr{L}(X,Y)$ eine Cauchyfolge. Wähle $x \in X$. Es gilt dann $\|T_nx - T_mx\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \varepsilon\|x\|$ falls $n, m \geq N$, wobei $N \in \mathbb{N}$ unabhängig von x ist. Dies zeigt, dass $(T_nx) \subseteq Y$ eine Cauchyfolge ist, also nach Voraussetzung auch konvergent gegen ein $T(x)$. Es ist leicht zu zeigen, dass $x \mapsto T(x)$ linear ist.
Zu $\varepsilon > 0$ exisitert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|Tx - T_mx\| \leq \varepsilon\|x\| \quad \text{für alle } m \geq n_0.$$

Damit folgt $\|T-T_m\| \to 0$. Da $\|Tx\| \leq \|Tx-T_mx\|+\|T_mx\| \leq (1+\|T_m\|)\|x\|$ für m groß genug, gilt $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. □

Satz 4.6. *Sind $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, $S \in \mathscr{L}(Y,Z)$, so gilt $ST \in \mathscr{L}(X,Z)$ und $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.*

Proof. Sei $x \in X$. Es gilt $\|STx\| \leq \|S\| \cdot \|Tx\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$. □

Bemerkung 4.7. *(a) $\mathscr{L}(X)$ ist eine normierte Algebra, d.h. $T, S \in \mathscr{L}(X)$ impliziert $ST \in \mathscr{L}(X)$ und $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$* (submultiplikative Norm). *Ist X vollständig, dann ist $\mathscr{L}(X)$ eine Banachalgebra.*

(b) Sei X ein Banachraum und $(a_n) \subset \mathbb{K}$ mit $r := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. Für $T \in \mathscr{L}(X)$ mit $\|T\| < 1/r$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n.$$

Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so definert man $f(T)$ durch die Potenzreihe von f.

Beispiel 4.8 (Operatoren auf Räumen stetiger Funktionen)**.** *(a) Es sei $X = C([0,1])$, $T : f \mapsto f(0)$, $T : X \to \mathbb{K}$. Dann ist T stetig mit $\|T\| = 1$.*

(b) $X = C^1([0,1])$, $T : X \to \mathbb{K}$, $Tf := f(0) + f'(1)$. Dann gilt $\|T\| = 1$.

(c) $X = C^1([0,1])$, versehen mit äquivalenter Norm

$$|||f||| := \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\},$$

$T : X \to \mathbb{K}$, $Tf := f(0) + f'(1)$. Dann gilt: $\|T\| = 2$.

(d) $X = C([0,1])$, $T : X \to \mathbb{K}$

$$Tf := \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dann $\|T\| = 1$.

(e) Allgemeiner: $X = C([0,1])$, $T : X \to \mathbb{K}$, $g \in C([0,1])$

$$Tf := \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dann $\|T\| = \int_0^1 |g(t)|\,\mathrm{d}t$.

Proof. (a) Es gilt:

$$|Tf| = |f(0)| \le \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \|T\| \le 1$$

Betrachte $f = \mathbf{1}$: $f(x) = 1$, $x \in [0,1]$, gilt $\|\mathbf{1}\| = 1 = T\mathbf{1} \Longrightarrow \|T\| = 1$.

(b) Es gilt:

$$|Tf| = |f(0) + f'(1)| \le |f(0)| + |f'(1)| \le \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_{C^1},$$

d.h $\|T\| \le 1$. Andererseits gilt $\|\mathbf{1}\|_{C^1} = 1$ und $T\mathbf{1} = 1$, also folgt $\|T\| = 1$.

(c) Es gilt

$$|Tf| = |f(0) + f'(1)| \le |f(0)| + |f'(1)| \le \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \le 2|||f|||,$$

d.h. $\|T\| \le 2$. Andererseits betrachte $f(x) := (x - 1/2)^2 + 3/4$, dann $|||f||| = 1$ und $|Tf| = 2$

(d) s. (e)

(e) Es gilt

$$|Tf| = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le \|f\|_\infty \int_0^1 |g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Andererseits gilt für

$$f(x) = \text{sign } g(x) := \begin{cases} 1 & g(x) \geq 0 \\ -1 & g(x) < 0 \end{cases}$$

$|TF| = \int_0^1 |g(t)\, \mathrm{d}t$. I. A. gilt aber $f \notin C([0,1])$, also approximiere f mit $(f_n) \subset C([0,1])$, $\|f_n\|_\infty = 1$. (Achtung: $f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\to} f$ ist nicht möglich! Wir benötigen nur $f_n \overset{\|\cdot\|_1}{\to} f$).

□

Beispiel 4.9 (Operatoren auf Folgenräumen). *(a)* $T : c \to \mathbb{K}$, $Tx := \lim_{n\to\infty} x_n$. *Dann* $\|T\| = 1$.

(b) Sei $c_{00} := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \neq 0$ *für höchstens endlich viele* $n\}$. *Sei* $(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *eine unendliche Matrix. Setze*

$$(Tx)_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \qquad i \in \mathbb{N},\ x \in c_{00}.$$

Für Anwendungen interessant: Matrizen, welche $\ell^1, \ell^2, \ell^\infty$ *invariant lassen.*

(i) $T \in \mathscr{L}(\ell^1) \iff \sup_{j\geq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty$

(ii) $T \in \mathscr{L}(\ell^\infty) \iff \sup_{i\geq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty$

(iii) $\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q\Big)^{p'/q} < +\infty \Longrightarrow T \in \mathscr{L}(\ell^p, \ell^{p'})$ $(1/p + 1/q = 1)$

Beispiel 4.10 (Integraloperatoren). *Sei* $I = [a,b]$ *und* $k : I \times I \to \mathbb{K}$ *stetig. Für* $f \in C(I)$ *definiere*

$$(Tf)(x) := \int_a^b k(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y, \qquad x \in I.$$

Dann gilt $T \in \mathscr{L}(C(I))$ *und* $\|T\| = \sup_{x\in I} \int_a^b |k(x,y)|\, \mathrm{d}y$.
Folgerung: die Fredholmsche Integralgleichung

$$f(x) - \int_a^b k(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y = g(x), \qquad x \in I$$

ist lösbar in $C(I)$*, falls* $g \in \mathrm{im}(Id - T)$*, und höchstens eine Lösung in* $C(I)$ *existiert falls* $\ker(Id - T) = \{0\}$.

Proof. Wegen der Stetigkeit existiert das Integral, es ist sogar $Tf \in C(I)$, denn

$$\begin{aligned} |(Tf)(x) - (Tf)(y)| &\leq \int_a^b |k(x,z) - k(y,z)| \cdot |f(z)| \,\mathrm{d}z \\ &\leq \|f\|_\infty (b-a) \sup_{z\in I} |k(x,z) - k(y,z)| \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$|(Tf)(x)| \leq \int_a^b |k(x,y)| \cdot |f(y)| \,\mathrm{d}z \leq \|f\|_\infty \int_a^b |k(x,y)| \,\mathrm{d}y$$

$$\Longrightarrow \qquad \|T\| \leq \sup_{x\in I} \int_a^b |k(x,y)| \,\mathrm{d}y.$$

Die Gleichheit $\|T\| = \sup_{x\in I} \int_a^b |k(x,y)| \,\mathrm{d}y$ folgt wie in Bspl. 4.8(e). ☐

Beispiel 4.11 (Differenzialoperatoren)**.**

(a) *Sei* $X = C^1([0,1])$ *und*

$$Tf := f'.$$

Dann

(i) $T : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ *ist nicht stetig.*

(ii) $T : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_{C^1}) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ *ist stetig.*

(b) *Im Allgemeinen: Ist* $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *offen und beschränkt, so definiere*

$$Tf := \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \cdot D_\alpha f, \qquad f \in C^k(\overline{\Omega}), \text{ mit } a_\alpha \in C(\overline{\Omega}).$$

Dann ist T *ein stetiger Operator von* $C^k(\overline{\Omega})$ *nach* $C(\overline{\Omega})$.

Spezielles Beispiel

$$\text{Laplace Operator:} \qquad \Delta := \frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_n}.$$

Proof.

(a) (i) Für $f_n(t) := t^n$ gilt $\|f_n\|_\infty = 1$, aber $\|Tf_n\|_\infty = n$.

(ii) Es gilt: $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_{C^1}$.

(b)

$$\begin{aligned} \|Tf\|_\infty &= \|\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha D_\alpha f\|_\infty \leq \sum_{|\alpha|\leq k} \|a_\alpha D_\alpha f\|_\infty \\ &\leq \sum_{|\alpha|\leq k} \|a_\alpha\|_\infty \|D_\alpha f\|_\infty \leq \sum_{|\alpha|\leq k} \|a_\alpha\|_\infty \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} \\ &\leq M \cdot \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.12. *Falls X endlich dimensional und $T : X \to Y$ linear ist, folgt sofort $T \in \mathscr{L}(X, Y)$.*

Definition 4.13. *Sei $B := B_X(0, 1)$. Ein Operator $T : X \to Y$ heißt* kompakt*, falls $T(B)$ relativ kompakt, d.h. $\overline{T(B)}$ kompakt ist. Ferner*

$$\mathscr{K}(X, Y) := \{T \in \mathscr{L}(X, Y) : T \text{ kompakt}\}, \qquad \text{und} \quad \mathscr{K}(X) := \mathscr{K}(X, X).$$

Bemerkung 4.14.

(a) $\mathscr{K}(X, Y) \subseteq \mathscr{L}(X, Y)$
(b) $\dim X < \infty \Longrightarrow T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *ist kompakt.*
(c) $T \in \mathscr{L}(X, Y)$, $\dim \operatorname{im}(T) < \infty \Longrightarrow T$ *ist kompakt*
(d) Id *ist kompakt* $\Longleftrightarrow \dim X < \infty$

Proof.

(a) Klar.
(b) Sei $(y_n) \subset T(B)$. Dann existiert $(x_n) \subset B$ mit $Tx_n = y_n$. Da $\overline{B}$ im Endlichdimensionalen kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ für ein $x \in \overline{B}$. Wegen der Stetigkeit von T erhalten wir
$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = Tx \in \overline{T(B)}.$$
(c) $\overline{T(B)}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt ($\dim \overline{T(B)} < \infty$).
(d) Folgt aus Korollar 3.8.

□

Satz 4.15. *Sei X ein normierter Vektorraum, Y Banachraum. Dann ist $\mathscr{K}(X, Y)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathscr{L}(X, Y)$; insbesondere ist $\mathscr{K}(X, Y)$ ein Banachraum.*

Proof. Sei $(T_n) \subseteq \mathscr{K}(X, Y)$ und $T_n \to T$. Es ist $T \in \mathscr{K}(X, Y)$ zu zeigen. Sei $(x_k) \subseteq B_X(0, 1)$. Nach Voraussetzung besitzt $(T_1 x_k)$ eine konvergente Teilfolge $(T_1 x_k^1)$. Rekursiv erhalten wir konvergente Teilfolgen $(T_n x_k^n)$ (für $k \to \infty$) mit $(x_k^{n+1}) \subset (x_k^n)$. Dann ist $y_n := x_n^n$ eine Teilfolge von x_n. Wir zeigen nun dass (Ty_n) eine Cauchyfolge ist. Zu $\varepsilon > 0$ existiert $m \in \mathbb{N}$, so dass $\|T_m - T\| \le \varepsilon$ und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|T_m y_n - T_m y_k\| \le \varepsilon$, $n, k \ge N$. Daher folgt

$$\begin{aligned} \|Ty_n - Ty_k\| &\le \|Ty_n - T_m y_n\| + \|T_m y_n - T_m y_k\| + \|T_m y_k - Ty_k\| \\ &\le \|T - T_m\| \|y_n\| + \|T_m y_n - T_m y_k\| + \|T_m - T\| \|y_k\| \\ &\le 2\varepsilon + \varepsilon, \quad n, k \ge N \end{aligned}$$

□

Korollar 4.16. *Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ und*

$$(T_n) \subset \mathscr{L}(X,Y)$$

mit $\dim \operatorname{im}(T_n) < \infty$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\|T - T_n\| \to 0 \Longrightarrow T$ *ist kompakt.*

Bemerkung 4.17. *Gilt die Umkehrung? P. Enflo, 1973: Nein, im Allgemeinen.*

Satz 4.18. *Seien X, Y, Z Banachräume, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, $S \in \mathscr{L}(Y,Z)$. T oder S kompakt $\Longrightarrow$ ST kompakt.*

Proof. Sei $(x_n) \subset B_X(0,1)$. Es ist zu zeigen, dass (STx_n) eine konvergente Teilfolge hat. Im Fall, dass T kompakt ist, erhalten wir eine konvergente Teilfolge (Tx_{n_k}), also ist auch (STx_{n_k}) konvergent. Sei S kompakt, dann besitzt (STx_n) eine konvergente Teilfolge, da (Tx_n) beschränkt ist. □

Definition 4.19. *Sei X ein Vektorraum.*

(a) *Ein (linearer) Operator $T : X \to \mathbb{K}$ heißt (lineares)* Funktional.
(b) *Ist X normiert, so heiß t der Raum $\mathscr{L}(X, \mathbb{K})$ aller stetigen Funktionale auf X der* Dualraum *von X und wird mit X' bezeichnet.*

Korollar 4.20. *Sei X ein normierter Vektorraum. Dann ist X' versehen mit*

$$\|x'\| := \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)|$$

ein Banachraum.

Bemerkung 4.21. *Die Existenz von* nichttrivialen *Funktionalen (d.h. nicht 0) ist nicht trivial!*

Satz 4.22.

(a) *Sei $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist*

$$J : \ell^q \to (\ell^p)', \quad (Jx)(y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x \in \ell^q,\, y \in \ell^p$$

ein isometrischer Isomorphismus.

(b) *J ist außerdem ein isometrischer Isomorphismus zwischen ℓ^1 und c_0'.*

Proof.

(a) ÜA.
(b) Sei $x = (x_n) \in \ell^1$ und $y = (y_n) \in c_0$. Dann gilt

$$|J(x)(y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|y\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|y\|_\infty \|x\|_{\ell^1}.$$

Weiter ist $J(x) : c_0 \to \mathbb{K}$ natürlich linear, also $J(x) \in c_0'$. Die obige Ungleichung zeigt $\|Jx\| \leq \|x\|$. Sei

$$\alpha_n^N := \begin{cases} \operatorname{sign} x_n & , \quad n \leq N, \\ 0 & , \quad n > N. \end{cases}$$

Dann gilt $\alpha^N \in c_{00}$, $\|\alpha^N\|_\infty = 1$ und

$$|J(x)(y)| = \sum_{n=1}^{m} |x_n y_n| = \sum_{n=1}^{m} |x_n|.$$

Dies zeigt $\|x\|_{\ell^1} \leq \|J(x)\|$, also ist J eine Isometrie (und deswegen auch injektiv). Wir zeigen nun die Surjektivität von J. Sei $\varphi \in c_0'$. Setze $x_i := \varphi(\delta_i)$, wobei $\delta_i \in c_0$ die Folge mit 1 in der Koordinate i und Null sonst ist. Dann ist $(x_n) \subset \ell^1$, da

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n| = \sum_{n=1}^{N} x_n \alpha_n^N = \varphi(\alpha^N) \leq \|\varphi\|.$$

Ferner gilt $J(x_n) = \varphi$, denn aus der Definition folgt $J(x_n)(y) = \varphi(y)$ für alle $y \in c_{00}$. Da J stetig und c_{00} dicht in c_0 ist, folgt $J(x_n)(y) = \varphi(y)$ für alle $y \in C_0$, also die Surjektivität von J.

□

Bemerkung 4.23.

(a) Sei $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt $(\ell^p)' = \ell^q$. Insbesondere ist für $p > 1$ dann $(\ell^q)' = \ell^p$.

(b) $c_0' = \ell^1$ und $(\ell^\infty)' \neq \ell^1$

Proof. ÜA. □

5. Lineare Funktionale – Hahn–Banach Theorem

Motivation:

[1.]

(a) Momentprobleme.

(b) Prinzip: Untersuche Eigenschaften von Banachraum X via Eigenschaften von X'.

5.1. **Hausdorff Momentenproblem.**

Gegeben $(a_n) \subset \mathbb{R}$, finde Borel Maß μ auf $[0,1]$mit

$$\int x^n \,\mathrm{d}\mu(x) = a_n.$$

Verallgemeinerung:

Problem 5.1 (Allgemeines Momentenproblem)**.**

Sei X normierter Vektorraum und seien $(x_n) \subset X$ linear unabhängig und $(a_n) \subset \mathbb{K}$ gegeben. Finde $\varphi \in X'$ mit $\varphi(x_n) = a_n$.

Idee: Definiere $\varphi'(x_n) := a_n$ auf $\operatorname{lin}\{x_1, x_2, \dots\}$ und setze φ' fort.

Theorem 5.2 (Hahn–Banach, algebraische Version)**.**

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, Y Unterraum von X und $p : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die

(a) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $\alpha \geq 0$, $x \in X$,

(b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $x, y \in X$,

erfüllt. Sei ferner $f : Y \to \mathbb{R}$ linear mit $f(x) \leq p(x)$ für alle $x \in Y$. Dann existiert eine lineare Abbildung $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = f(x)$ für alle $x \in Y$ und $F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Lemma 5.3 (Zorn)**.** *Sei $(\mathcal{M}, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, so dass jede total geordnete Teilmenge $\mathcal{N}$ eine obere Schranke besitzt. Dann besitzt $\mathcal{M}$ ein maximales Element in $\mathcal{M}$.*

Beweis vom Theorem 5.2. Betrachte

$$\begin{aligned}\mathcal{M} := \{(Z, g) : Y \subseteq Z \subseteq X \text{ Unterraum, } g : Z \to \mathbb{R} \text{ linear,}\\ g = f \text{ auf } Y,\ g \leq p \text{ auf } Z\}.\end{aligned}$$

Sei $(Z, g) \in \mathcal{M}$, $Z \neq X$ und $x_0 \in X \setminus Z$. Setze $Z_0 := \operatorname{lin}\{Z, x_0\}$ und $g_0(z+\alpha x_0) := g(z)+c\alpha$, wobei c noch so zu bestimmen ist, dass $(Z_0, g_0) \in \mathcal{M}$ gilt. Es ist nur zu zeigen, dass $g_0 \leq p$ auf Z_0 für ein c gilt, d.h. $g(z) + c\alpha \leq p(z + \alpha x_0)$ für alle $z \in Z$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Der Fall $\alpha = 0$ ist trivial, also nehmen wir $\alpha \neq 0$ an. Die Konstante c muss folgendes erfüllen:

$$\begin{aligned} c &\leq \frac{p(z + \alpha x_0) - g(z)}{\alpha} = p(z/\alpha + x_0) - g(z/\alpha), \quad \text{falls } \alpha > 0 \\ c &\geq \frac{p(z + \alpha x_0) - g(z)}{\alpha} = g(-z/\alpha) - p(-z/\alpha - x_0), \quad \text{falls } \alpha < 0. \end{aligned}$$

Es ist also c zu finden mit

$$\sup_{z\in Z}(g(z) - p(z - x_0)) \leq c \leq \inf_{z\in Z}(p(z + x_0) - g(z)).$$

Dies ist möglich, da für alle $z, z' \in Z$

$$\begin{aligned} g(z') + g(z) = g(z' + z) \leq p(z' + z) &= p(z' - x_0 + x_0 + z) \\ &\leq p(z' - x_0) + p(x_0 + z) \end{aligned}$$

gilt. Das heißt, wir können jedes $(Z, g) \in \mathcal{M}$, $Z \neq X$ fortsetzen. Die Menge $\mathcal{M}$ ist geordnet durch die Relation $(Z', g') \leq (Z, g)$ falls $Z' \subseteq Z$ und $g' = g$ auf Z'. Für ein maximales Element (Z, g) muss $Z = X$ gelten. Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ total geordnet. Setze $Z' = \bigcup_{(Z,g)\in\mathcal{N}} Z$ und $g'(x) = g(x)$ falls $x \in Z$ und $(Z, g) \in \mathcal{N}$. Die Abbildung g' ist wohldefiniert und $(Z', g') \in \mathcal{M}$ ist ein obere Schranke von $\mathcal{N}$. Die Anwendung des Zornschen Lemmas vollendet den Beweis. □

Bemerkung 5.4. *Parameter c ist nicht eindeutig, also ist F auch nicht eindeutig.*

Satz 5.5 (Hahn–Banach, Fortsetzungsversion)**.** *Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$, Y Unterraum. Dann existiert zu jedem stetigen Funktional $y' \in Y'$ ein stetiges Funktional $x' \in X'$ mit*

$$x' = y' \textit{ auf } Y \textit{ und } \|x'\|_{X'} \leq \|y'\|_{Y'}.$$

Proof. Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Setze $p(x) := \|y'\|_{Y'}\|x\|_X$ für $x \in X$. Dann gilt $p(y) \geq y'(y)$ für jedes $y \in Y$. Nach dem algebraische Hahn–Banach Theorem existiert ein Funktional $x' : X \to \mathbb{R}$ mit $x' \leq p$ und $x' = y'$ auf Y. Daraus folgt $\|x'\| = \|y'\|$ (und somit ist x' auch stetig).

Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Wir fassen X, Y auf als Vektorräume über $\mathbb{R}$ (Bezeichnung: $X_{\mathbb{R}}$, $Y_{\mathbb{R}}$). Dann ist $y'_{re} :=$ Re y' $\mathbb{R}$-linear und $\|y'_{re}\| \leq \|y'\|$. Außerdem gilt $y(ix) = iy(x)$, d.h. Re $y(ix) = -$Im $y(x)$. Somit erhalten wir:

$$y'(x) = \text{Re } y'(x) + \imath \text{Im } y'(x) = y'_{re}(x) - \imath y'_{re}(\imath x).$$

Sei x'_{re} eine Fortsetzung von y'_{re} auf $X_{\mathbb{R}}$ mit $\|x'_{re}\| = \|y'_{re}\|$. Setze $x'(x) := x'_{re} - \imath x'_{re}(\imath x)$. Dann $x' = y'$ auf Y, und x' ist $\mathbb{C}$-linear. Sei $x \in X$ und $x'(x) = r\lambda$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $|\lambda| = 1$, $r \geq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}|x'(x)| = r = \text{Re } (\overline{\lambda} x'(x)) = \text{Re } x'(\overline{\lambda} x) = x'_{re}(\overline{\lambda} x) \leq \|x'_{re}\| \cdot \|x\| \\ = \|y'_{re}\| \cdot \|x\| \leq \|y'\| \cdot \|x\|.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\|x'\| = \|y'\|$. □

Korollar 5.6. *Sei X normierter Vektorraum.*

(a) $x \in X \implies$ es existiert $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi(x) = \|x\|$.
(b) $\|x\| = \sup_{\varphi \in X' \|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)|$ für alle $x \in X$.
(c) Sei Y ein abgeschlossener Unterraum von X, $x \in X \setminus Y \implies$ es existiert $\varphi \in X'$ mit $\varphi\big|_Y = 0$ und $\varphi(x) \neq 0$.
(d) Sei $Y \subseteq X$ Unterraum. Dann ist Y dicht in $X \iff$ Für $\varphi \in X'$ mit $\varphi\big|_Y = 0$ gilt $\varphi = 0$.

Proof. (a) Setze $Y = \text{lin}\{x\}$, $y'(\lambda x) = \lambda\|x\|$ und wende Satz 5.5 an.
(b) Folgt aus (a).
(c) Sei $q : X \to X/Y$ die Quotientenabbildung, dann gilt $q(y) = 0$ für $y \in Y$ und $q(x) \neq 0$. Nach (b) existiert $\Psi \in (X/Y)'$ mit $\Psi(q(x)) \neq 0$. Setze $\varphi = \Psi \circ q$.
(d) $\Leftarrow$: Folgt aus (c).
$\Rightarrow$: Sei $\varphi \in X'$ mit $\varphi|_Y = 0$. Zu $x \in X$ existiert $(x_n) \subset Y$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Da φ stetig ist, folgt

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

□

Satz 5.7 (Helley)**.** *Sei X normierter Vektorraum, $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$) linear unabhängig und $a_n \in \mathbb{K}$. Es existiert $\varphi \in X'$ mit $\varphi(x_n) = a_n$ genau dann, wenn*

$$\text{für alle } \alpha_1, \ldots, \alpha_m \quad \Big|\sum_{i=1}^m \alpha_i a_i\Big| \leq c\Big\|\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i\Big\|$$

mit nur von a_i abhängiger Konstante c.

Proof. Notweindigkeit: Sei $\varphi \in X'$ mit den gewünschten Eigenschaften.

$$\Big|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i\Big| = \Big|\varphi\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\Big)\Big| \le \|\varphi\| \cdot \Big\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\Big\|.$$

Die Bedingung ist hinreichend: Folge der Idee vom Anfang. Setze $Y := \operatorname{lin}\{x_1, x_2, \dots\}$, definiere $\varphi'(x_n) := a_n$ und linear auf Y. Dann ist φ' stetig auf Y nach Voraussetzung. Verwende Hahn-Banach. $\square$

MISSING!

Die Definitionen von $\wedge$,Ring, μ_+, μ_-, $\|\mu\|$, werden noch nachgeliefert.

Theorem 5.8 (Daniell–Stone)**.** *Sei $X \neq \emptyset$ und F ein Vektorraum reellwertiger Funktionen auf X, so dass für $f, g \in F$ auch $f \wedge g \in F$ und $f \wedge \mathbf{1} \in F$. Bezeichne mit $\mathfrak{R}_F$ dem von den Mengen $\{x \in X : f(x) > 1\}$, $f \in F$ generierten σ-Ring. Sei $\Phi : F \to \mathbb{R}$ ein* positives *(d.h. $\Phi f \ge 0$ falls $f \ge 0$), lineares Funktional mit der Eigenschaft $\Phi f_n \to 0$ für $f_n \downarrow 0$. Es existiert ein Maß μ auf $\mathfrak{R}_F$ so, dass $\Phi f = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.*

Zum Beweis benötigen wir zwei, aus der Maßtheorie wohl bekannte Lemmata (siehe Konstruktion des Lebesgue-Maßes).

Lemma 5.9. *Es seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \le b_n$ so, dass $[a_n, b_n) \cap [a_k, b_k) = \emptyset$, falls $n \neq k$, und $[a, b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n)$. Dann $b - a = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$.*

Lemma 5.10. *Alle σ-additiven, positiven, finiten Funktionen auf einem Halbring $\mathfrak{S}$ können (eindeutig) zu dem von $\mathfrak{S}$ generierten σ-Ring fortgesetzt werden.*

Proof. 1. Schritt: Definiere das Intervall $[f, g) := \{(x, t) \in X \times Y : f(x) \le t < g(x)\}$. Setze $\mathfrak{S} := \{[f, g) : \ f, g \in F,\ f \le g\}$. Dann ist $\mathfrak{S}$ ein Halbring, denn:
Sei $A, B \in \mathfrak{S}$. Es ist $A \cap B \in \mathfrak{S}$ zu zeigen; wenn $A = [f_1, g_1)$, $B = [f_2, g_2)$, dann ist $A \cap B = [f_1 \vee f_2, g_1 \wedge g_2)$ ($f_1 \vee f_2 \in F$ wegen Linearität und Voraussetzung). Ist $A \subseteq B$, dann gilt $B \setminus A = [f_2 \vee g_1, g_2) \cup [f_2, g_2 \wedge f_1)$. Wir haben jetzt gezeigt, dass $\mathfrak{S}$ ein Halbring ist.

2. Schritt: Setze $\nu : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$, $\nu([f, g)) := \Psi(g - f)$. Wir zeigen, dass ν wohldefiniert (ist trivial) und σ-additiv ist. Es seien $[f_n, g_n)$ paarweise disjunkt und $[f, g) = \bigcup_n [f_n, g_n)$. Dann gilt auch für jedes x

$$[f(x), g(x)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f_n(x), g_n(x)).$$

Nach dem obigen Lemma folgt $g - f = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - f_n)$. Setze $h_m = g - f - \sum_{n=1}^{m} (g_n - f_n)$, also gilt $h_n \downarrow 0$, und nach Voraussetzung $\Phi h_n \to 0$. Folglich gilt

$$\nu([f, g)) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu([f_n, g_n)).$$

Nach dem zweiten Lemma existiert ein σ-additives Maß $\widetilde{\nu}$. Sei $0 \leq f \in F$. Für $f_n := (n(f - f \wedge \mathbf{1})) \wedge \mathbf{1}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$[0, af_n) \subseteq [0, af_{n+1}) \qquad \text{und} \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, af_n) = \{x \in X : f(x) > 1\} \times [0, a).$$

Definiere $\mu(A) := \widetilde{\nu}(A \times [0, 1))$ für $A \in \mathfrak{R}_F$. Dann ist μ ein Maß mit der Eigenschaft

$$\widetilde{\nu}(\{x \in X : f > 1\} \times [0, a)) = a\mu(\{x \in X : f > 1\}).$$

Setze $A_i^n = \{x \in X : i^{-1}2^n f(x) > 1\}$ für $1 \leq i \leq n2^n$ und $A_{n2^n+1}^n = \emptyset$ und

$$B_n := \bigcup_{i=1}^{n2^n} (A_i^n \setminus A_{i+1}^n) \times [0, i2^{-n}).$$

Es gilt dann $B_n \subseteq B_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = [0, f)$, folglich

$$\Psi f = \widetilde{\nu}([0, f)) = \lim_{n \to \infty} \widetilde{\nu}(B_n) = \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

□

Theorem 5.11 (Riesz). *Sei $\emptyset \neq K$ ein kompakter, metrischer Raum. Dann $C(K)' \cong \mathcal{M}(K)$, dem Raum der regulären Borel-Maße.*

Proof. (Nur der reelle Fall.) Ein Borel Maß μ ergibt ein stetiges lineares Funktional φ durch $\varphi_\mu(f) := \int_K f \, \mathrm{d}\mu$, denn Linearität ist trivial und

$$\begin{aligned} |\varphi_\mu(f)| &= \Big| \int_K f \, \mathrm{d}\mu_+ - \int_K f \, \mathrm{d}\mu_- \Big| \leq \int_K |f| \, \mathrm{d}\mu_+ + \int_K |f| \, \mathrm{d}\mu_- \\ &\leq \|f\|_\infty (\|\mu_+\| + \|\mu_-\|). \end{aligned}$$

Umgekehrt: Sei erst φ ein positives Funktional. Es sei $C(K) \ni f_n \downarrow 0$. Nach Satz von Dini gilt $f_n \to 0$ auch gleichmäßig. Das heißt, die Bedingungen von Theorem 5.8 für $F = C(K)$ und $\Phi = \varphi$ sind erfüllt, also existiert ein μ auf $\mathfrak{R}_F$ mit $\varphi(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu$. Da $K \in \mathfrak{R}$ ist, stimmt $\mathfrak{R}$ mit der Borel σ-Algebra überein.

Nun beweisen wir den allgemeinen Fall, d.h. φ ist beliebig. Setzte $\varphi_+(f) = \sup\{\varphi(g) : g \leq f\}$ für $f \geq 0$. Dann gilt für $f, g \geq 0$

$$\begin{aligned} \varphi_+(f + g) &= \sup\{\varphi(h) : 0 \leq h \leq f + g\} \\ &= \sup\{\varphi(h_1 + h_2) : 0 \leq h_1 \leq f, \, 0 \leq h_2 \leq g\} = \\ &= \sup\{\varphi(h_1) : 0 \leq h_1 \leq f\} + \sup\{\varphi(h_2) : 0 \leq h_2 \leq g\} \\ &= \varphi_+(f) + \varphi_+(g). \end{aligned}$$

Wir haben hier benutzt, dass $0 \leq h \leq f + g$ die Existenz von $0 \leq h_1 \leq f$ und $0 \leq h_2 \leq g$ mit $h = h_1 + h_2$ impliziert. Definiere jetzt $\varphi_+(f)$ für beliebige $f \in C(K)$ durch

$$\varphi_+(f) := \varphi_+(f) - \varphi_+(f_-).$$

Die obigen ergeben, dass φ_+ linear ist. Es ist leicht zu zeigen, dass sogar $\varphi_+ \in C(K)'$. Natürlich ist φ_+ positiv. Setze $\varphi_- := \varphi_+ - \varphi$. Da $\varphi_+(f) \geq \varphi(f)$ für $f \geq 0$, ist φ_- auch positiv. Schließlich verwende den ersten Teil um zu zeigen, dass μ_+ bzw. μ_- zu φ_+ und φ_- existieren, und setze $\mu := \mu_+ - \mu_-$.

Isometrie: Es bleibt zu zeigen $\|\varphi_\mu\| = \|\mu\| := \|\mu_+\| + \|\mu_-\|$. Sei $\mu \in \mathcal{M}(K)$ und N_+ und N_- seien nach der Hahn Zerlegung gewählt, d.h. $N_+ \cap N_- = \emptyset$, $N_+ \cup N_- = K$, $\mu_+(N_-) = 0 = \mu_-(N_+)$. Wegen der Regularität von μ finden wir $K_+ \subseteq N_+$, $K_- \subseteq N_-$, mit $K_\pm$ kompakt, $\mu_\pm(N_\pm \setminus K_\pm) < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Sei $f\big|_{K_\pm} = \pm 1$ und sonst $-1 \leq f \leq 1$ ist stetig. Dann

$$\begin{aligned}
|\varphi_\mu(f)| &= \Big|\int_K f \,\mathrm{d}\mu\Big| = \Big|\int_{N_+} f \,\mathrm{d}\mu + \int_{N_-} f \,\mathrm{d}\mu\Big| = \Big|\int_{N_+} f \,\mathrm{d}\mu_+ - \int_{N_-} f \,\mathrm{d}\mu_-\Big| \\
&= \Big|\int_{N_+} f \,\mathrm{d}\mu_+ - \int_{N_-} f \,\mathrm{d}\mu_-\Big| \\
&= \int_{K_+} 1 \,\mathrm{d}\mu_+ - \int_{K_-} 1 \,\mathrm{d}\mu_- + \Big|\int_{N_+\setminus K_+} f \,\mathrm{d}\mu_+ - \int_{N_-\setminus K_-} f \,\mathrm{d}\mu_-\Big| \\
&\geq \mu_+(K_+) + \mu_-(K_-) - 2\varepsilon = \mu_+(K) + \mu_-(K) - 2\varepsilon \\
&= \|\mu_+\| + \|\mu_-\| - 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

d.h. $\|\varphi_\mu\| = \|\mu_+\| + \|\mu_-\|$. □

6. Schwache Konvergenz

Notation 6.1.

(a) *Sei X ein normierter Vektorraum, X' der Dualraum und $X'' := (X')'$ dessen Dualraum. Dann heißt X'' der* Bidualraum *von X.*

(b) *Sei $x \in X$. Betrachte die Abbildung:*

$$\iota_x : X' \to \mathbb{K}, \quad \iota_x(x') := x'(x).$$

Satz 6.2. *Die Abbildung $\iota : X \to X''$, $\iota(x) := \iota_x$ ist eine lineare Isometrie.*

Proof. Es ist klar, dass ι_x linear ist. Ferner ist ι_x stetig, denn $|x'(x)| \leq \|x'\|\|x\|$, d.h. $\|\iota_x\| \leq \|x\|$ gilt. Somit ist $\iota_x \in X''$. Klar ist auch, dass ι linear ist. Nach Korollar 5.6 folgt $\|\iota_x\| = \|x\|$. □

Bemerkung 6.3.

(a) *Die Abbildung $\iota : X \to X''$ heißt* kanonische Abbildung *von X in seinen Bidualraum.*

(b) *In allgemeinem ist ι nicht surjektiv.*

(c) *X ein normierter Vektorraum $\Longrightarrow$ $\overline{\iota(X)}$ ist abgeschlossen in X''*

Proof. (b) Sei $X = c_0$. Dann $X' \simeq \ell^1$, $X'' \simeq \ell^\infty$. Also gilt $\iota(x) = x$ für alle $x \in c_0$, und ι ist nicht surjektiv. □

Korollar 6.4 (Vervollständigung eines normierten Vektorraumes)**.** *Sei X ein normierter Vektorraum. Dann ist X isometrisch isomorph zu einem dichten Unterraum eines Banachraumes.*

Definition 6.5. *Ein Banachraum X heißt* reflexiv*, falls ι_X surjektiv ist.*

Bemerkung 6.6. *Falls X reflexiv ist dann $X \simeq X''$. Die Umkehrung ist falsch wie gezeigt von James, 1950. D.h. $X \simeq X''$ impliziert nicht die Surjektivität von ι_X.*

Beispiel 6.7.

(a) c_0 und ℓ^1 sind nicht reflexiv.
(b) Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ ein Isomorphismus. Dann X reflexiv $\iff$ Y reflexiv.
(c) Sei $1 < p < \infty$. Dann ist ℓ^p reflexiv.
(d) Sei $1 < p < \infty$. Dann ist $L^p(M, \mu)$ reflexiv (später).

Satz 6.8. *Sei X Banachraum.*

(a) X reflexiv $\Longrightarrow$ Jeder abgeschlossene Unterraum von X ist reflexiv.
(b) X reflexiv $\iff$ X' reflexiv.

Proof. (a) Sei $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum von X. Für $u'' \in U''$ sei $x''(x') := u''(x'|_U)$, $x' \in X'$. Dann $x'' \in X''$, denn $|u''(x'|_U)| \leq \|u''\|\|x'\|$. Da X reflexiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $x'(x) = u''(x'|_U)$ für alle $x' \in X'$.
Beh.: $x \in U$
Falls $x \notin U$, so existiert, nach Korollar 5.6, ein $x' \in X'$ mit $x'(x) = 1$ und $x'|_U = 0$. Das ist ein Widerspruch zu

$$1 = x'(x) = u''(x'|_U) = 0.$$

Also $x \in U$. Es bleibt $u''(u') = u'(u)$ für alle $u' \in U'$ zu zeigen. Sei $u' \in U'$ und $x' \in X'$ eine Fortsetzung von u' nach Hahn–Banach. Dann gilt $u''(u') = u''(x'|_U) = x'(x) = u'(x)$, d.h. $u'' = \iota_U(u)$ und U ist reflexiv.

(b) "$\Rightarrow$": zu zeigen: $\iota_{X'} : X' \to X'''$ surjektiv. Sei $x''' \in X'''$. Betrachte $x' : X \to \mathbb{K}$, $x'(x) := x'''(\iota_X(x))$. Dann $x' \in X'$. Da X reflexiv ist folgt, dass jedes $x'' \in X''$ die Form $x'' = \iota_X(x)$ hat. Daher $x'''(x'') = x'''(\iota_X(x)) = x'(x) = (\iota_X(x))(x') = x''(x)$. D.h. $x''' = \iota_{X'}(x')$.

"$\Leftarrow$": Annahme: X' reflexiv. Dann ist nach dem obigen Beweis X'' auch reflexiv. Da X isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von X'' ist, folgt die Reflexivität von X aus Teil (a). $\square$

Satz 6.9.

(a) Sei X ein normierter Vektorraum, und X' separabel. Dann ist X auch separabel.
(b) Sei X reflexiv. Dann X separabel $\Longrightarrow$ X' separabel.

Proof. (a) Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ eine dichte Menge in X'. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in X$ mit $\|x_n\| \leq 1$ und $|\varphi_n(x_n)| \geq 1/2\|\varphi_n\|$. Definiere $Y := \overline{\text{lin}}\{x_n : n \in$

$\mathbb{N}\}$. Sei $\varphi \in X'$ mit $\varphi = 0$ auf Y. Wir zeigen nun dass $\varphi = 0$ überall, dann folgt auch $X = Y$.

$$\|\varphi - \varphi_n\| \geq |(\varphi - \varphi_n)(x_n)| = |\varphi_n(x_n)| \geq 1/2\|\varphi_n\| \geq 1/2\|\varphi\| - 1/2\|\varphi - \varphi_n\|,$$

also $\frac{3}{2}\|\varphi - \varphi_n\| \geq \frac{1}{2}\|\varphi\|$, d.h. $\|\varphi\| = 0$, da $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ dicht in X' ist.

(b) Trivial aus (a). □

Definition 6.10. *Sei X normierter Vektorraum.*

(a) *Eine Folge $(x_n) \subseteq X$ heißt* schwach konvergent *gegen ein $x \in X$, falls*
$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x) \qquad \forall \varphi \in X'.$$
(b) *Eine Menge $M \subseteq X$ heißt* schwach folgenkompakt*, falls jede Folge in M eine schwach konvergente Teilfolge besitzt, deren Limes in M liegt.*

Bemerkung 6.11.

(a) *Da X' die Punkte von X trennt, d.h. für $x \neq y \in X$ existiert ein $\varphi \in X'$ mit $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, ist der schwache Limes eindeutig bestimmt. Schreibweise:*
$$x_n \xrightarrow{\sigma} x, \qquad \sigma - \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$
(b) *Normkonvergenz impliziert schwache Konvergenz.*
(c) *Die Umkehrung gilt nicht.*
(d) *$x_n \xrightarrow{\sigma} x$ in X, dann $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$* (schwache Unterhalbstetigkeit einer Norm)
(e) *Sei $(x_n) \subset X$ mit $x_n \xrightarrow{\sigma} x$. Dann ist (x_n) beschränkt.*

Proof. (a)-(d) ÜA. (e) später. □

Satz 6.12. *Es sei X reflexiv. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_X(0,1)} \subseteq X$ schwach folgenkompakt.*

Proof. Sei $x_n \in \overline{B_X(0,1)}$ eine Folge. Betrachte $Y := \overline{\text{lin}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist Y separabel und auch reflexiv nach Satz 6.8. Für jedes $\varphi \in Y'$ ist $\varphi(x_n)$ beschränkt in $\mathbb{K}$. Daraus folgt, dass $\varphi(x_n)$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge in Y'. Dann hat $\varphi_1(x_n)$ eine konvergente Teilfolge $\varphi_1(x_n^1)$. Durch Induktion erhalten wir eine Folge (x_n^k), so dass $(x_n^k) \subset (x_n^{k-1})$ und $\varphi_k(x_n^k)$ konvergiert gegen α_k für $n \to \infty$. Dann konvergiert $\varphi_k(x_n^n)$ gegen α_k.
<u>Beh.:</u> $\varphi(x_n^n)$ konvergiert für *alle* $\varphi \in Y'$.
Da $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ dicht in Y' ist, existiert für $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|\varphi - \varphi_k\| \leq \varepsilon$. Wähle nun $n_0 \in \mathbb{N}$ mit
$$|\varphi_k(x_n^n) - \varphi_k(x_m^m)| \leq \varepsilon, \quad n, m \geq n_0.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}|\varphi(x_n^n) - \varphi(x_m^m)| =& |\varphi(x_n^n) - \varphi_k(x_n^n)| + |\varphi_k(x_n^n) - \varphi_k(x_m^m)| \\ &+ |\varphi_k(x_m^m) - \varphi(x_m^m)| \\ \leq& \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon,\end{aligned}$$

Also kovergiert $\varphi(x_n^n)$. Wir bezeichnen den Limes mit $\alpha(\varphi)$. Dann gilt $\alpha \in Y'' = Y$, denn die Linearität ist trivial und $|\varphi(x_n^n)| \leq \|\varphi\| \|x_n^n\| \leq \|\varphi\|$.
Es bleibt zu zeigen dass $\varphi(x_n^n)$ für alle $\varphi \in X'$ kovergiert, was aus $\varphi(x_n) = \varphi|_Y(x_n)$ folgt. □

Definition 6.13. *Es sei X ein Vektorraum und $M \subseteq X$. Dan heißt $p_M : X \to [0, +\infty]$*

$$p_M(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda M\}$$

das Minkowskifunktional *(von M). Weiter heißt M* absorbierend*, falls*

$$p_M(x) < +\infty, \quad x \in X.$$

Beispiel 6.14. *Sei X ein normierter Vektorraum und $M = B_X(0, 1)$. Dann $p_M(x) = \|x\|$.*

Bemerkung 6.15. *Sei X ein normierter Vektorraum, $U \subseteq X$ konvex mit $0 \in \mathrm{int}(U)$.*

(a) $B_X(0, \varepsilon) \subseteq U$, also $p_U(x) \leq \frac{\|x\|}{\varepsilon}$.
(b) p_U ist sublinear.
(c) Ist U offen, dann gilt $U = p_U^{-1}([0, 1))$.

Proof. (a) klar.
(b) $p_U(\lambda x) = \lambda p_U(x)$ $(\lambda > 0)$ ist klar.
Zu $x, y \in X$ und $\varepsilon > 0$ wähle $\lambda, \mu > 0$ mit $x \in \lambda U$, $y \in \mu U$ und $\lambda \leq p_U(x) + \varepsilon$, $\mu \leq p_U(y) + \varepsilon$, dann gilt

$$U \ni \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu} = \frac{x+y}{\mu+\lambda}.$$

$\implies p_U(x + y) \leq \lambda + \mu \leq p_U(x) + p_U(y) + 2\varepsilon$.
(c) $\subset$: Sei $u \in U$. Dann existiert $B(u, \varepsilon) \subset U$, d.h. $(1+\varepsilon/2)u \in B(u, \varepsilon) \subset U$. Somit folgt $p_U(x) < 1$.
$\supset$: Sei $x \in p_U^{-1}([0, 1))$ mit $p_U(x) = \lambda < 1$. Da U konvex ist und $0 \in U$, folgt aus $x \in U$ $\lambda x \in U$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Nach Voraussetzung gilt $x/(\lambda + \varepsilon) \in U$ mit $\lambda + \varepsilon < 1$ und somit $\frac{\lambda+\varepsilon}{\lambda+\varepsilon}x = x \in U$.

□

Satz 6.16 (Trennungssatz)**.** *Sei $M \subseteq X$ konvex und abgeschlossen und $x \notin M$. Dann existiert $\varphi \in X'$ und $c \in \mathbb{R}$ mit* Re $\varphi(y) < c <$ Re $\varphi(x)$ *für alle $y \in M$.*

Proof. Wir beweisen nur den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. O.B.d.A sei $0 \in M$ (Sei $m \in M$ und betrachte $M - m$ und $x - m$). Ersetze M durch $U = \overline{M + B(0, r)}$, wobei $r < \mathrm{dist}(x_0, M)$. Dann ist U auch konvex, abgeschlossen, und $0 \in \mathrm{int}(U)$, also U ist absorbierend. Außerdem gilt $p_U(x) \leq 1$ für $x \in U$ und $p_U(x_0) > 1$.

Definiere $f(\alpha x_0) := \alpha p_U(x_0)$, ein lineares Funktional auf $\operatorname{lin}\{x_0\}$. Sei φ eine Fortsetzung von f nach dem Satz von Hahn–Banach 5.2. Dann gilt $\varphi \le p \le 1$ auf U und $\varphi(x_0) = f(x_0) = p(x_0) \ge 1$. Da $B(0,r) \subseteq U$ und $\varphi(x) \le p(x) > 1$, gilt $\varphi(x) \le p(x) \le \|x\|/r$, d.h. $\varphi \in X'$. □

Korollar 6.17. *Sei X ein normierter Vektorraum und $M \subseteq X$ konvex und abgeschlossen. Ferner sei $(x_n) \subseteq M$ eine schwach konvergente Folge, $x_n \xrightarrow{\sigma} x \in X$. Dann liegt x in M. (Die Menge M heißt* schwach folgenabgeschlossen.*)*

Proof. Verwende den Trennungssatz falls $x \notin M$ wäre. □

Korollar 6.18 (Lemma von Mazur)**.** *Sei (x_n) eine schwach konvergente Folge in einem normierten Vektorraum, $x_n \xrightarrow{\sigma} x$. Dann gilt $x \in \overline{\operatorname{conv}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Proof. Verwende Korollar 6.17 □

Definition 6.19. *Es seien X, Y Banachräume und $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. Der* zu T adjungierter Operator *$T' : Y' \to X'$ ist definiert durch*

$$(T'y')(x) := y'(Tx), \qquad x \in X,\ y' \in Y'.$$

Beispiel 6.20.

(a) *Sei $X = Y = \ell^2$ und $T =$Linksshift, d.h.,*

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Dann

$$\varphi(Tx) = y_1 x_2 + y_2 x_3 + \cdots$$

für $\varphi = (y_n) \in \ell^2$. Also $T'(y_1, y_2, y_3, \dots)$

(b) *Auf $L^2([0,1])$ sei T durch*

$$(Tf)(x) := \int_0^1 k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

wobei $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Dann ist T' von der Form

$$(T'f)(x) := \int_0^1 k'(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

wobei $k'(x,y) = k(y,x)$.

Proof. (a) Sei $x \in \ell^p$ und $y \in \ell^q$. Dann gilt:

$$y'(Tx) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_{i+1} = (T'y')(x).$$

(b) Sei $1/p + 1/q = 1$. Dann definiert $L^q(M,\mu) \to L^p(M,\mu)'$

$$J(g)f := \int_M f \cdot g \,\mathrm{d}\mu, \qquad g \in L^q(M,\mu),\ f \in L^p(M,\mu).,$$

einen isometrischen Isomorphismus (vgl. Satz 7.10).

Wähle $f, g' \in L^2([0,1])$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g'(Tf) &= \int_0^1 g'(x) \int_0^1 k(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(y) \int_0^1 k(x,y) g'(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = (T'g')f. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.21. *Es gelten:*

(a) $(\alpha T_1 + \beta T_2)' = \alpha T_1 + \beta T_2$*,* $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(X,Y)$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*.*

(b) $(T_2 T_1)' = T_1' T_2'$*,* $T_1 \in \mathscr{L}(X,Y)$*,* $T_2 \in \mathscr{L}(Y,Z)$*.*

(c) $T'' \iota_X = \iota_Y T$*,* $T \in \mathscr{L}(X,Y)$*.*

Proof. (a) und (b) sind klar. (c) folgt aus

$$(T'' \iota_X(x))(y') = \iota_X(x)(T'y') = T'y'(x) = y'(Tx) = \iota_Y(Tx)(y).$$

□

Satz 6.22. *Die Abbildung* $\mathscr{L}(X,Y) \to \mathscr{L}(Y',X')$*,* $T \mapsto T'$ *ist linear und isometrisch.*

Proof. Linearität ist klar. Da $\|T'y'\| = \|y'T\| \leq \|y'\| \cdot \|T\|$, gilt $\|T'\| \leq \|T\|$. Die Gleichheit der Normen ergibt sich aus dem Satz von Hahn-Banach:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{\|y'\|\leq 1} |y'(Tx)| = \sup_{\|y'\|\leq 1} \sup_{\|x\|\leq 1} |y'(Tx)| \\ &= \sup_{\|y'\|\leq 1} \|T'y'\| = \|T'\|. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.23. *Die Abbildung* $\mathscr{L}(c_0, \ell^1) \to \mathscr{L}(\ell^1, \ell^\infty)$*,* $T \mapsto T'$ *ist nicht surjektiv.*

Proof. Offenbar kann jedes $T \in \mathscr{L}(c_0, \ell^1)$ durch eine Matrix $(M_{ij}(T))$ und jedes $S \in \mathscr{L}(\ell^1, \ell^\infty)$ durch eine Matrix $(M_{ij}(S))$ auf c_{00} dargestellt werden. Diese Darstellung ist eindeutig, da c_{00} sowohl in c_0 als auch in ℓ^1 dicht ist. Nach Definition der Adjungierten erhalten wir $M_{ij}(T) = \overline{M_{ji}(T')}$ (vgl. lineare Algebra). Insbesondere wird durch $M_{ij} = 1$, $i, j \in \mathbb{N}$ ein stetiger Operator $S \in \mathscr{L}(\ell^1, \ell^\infty)$ definiert. Falls es ein $T \in \mathscr{L}(c_0, \ell^1)$ mit $T' = S$ gäbe, müsste $M_{ij}(T) = 1$, $i, j = 1$ sein, was aber ein Widerspruch zu $T \in \mathscr{L}(c_0, \ell^1)$ ist. □

Satz 6.24 (Satz von Schauder)**.** *Es seien X, Y Banachräume und $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. Dann gilt die Äquivalenz*

$$T \text{ kompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad T' \text{ kompakt.}$$

Proof. "$\Rightarrow$": Sei T kompakt und $(y_n') \subseteq Y'$ beschränkt. Es ist zu zeigen ist, dass $(T'y_n')$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei $K := \overline{T\overline{B_X(0,1)}}$. Dann ist K ein kompakter, metrischer Raum. Betrachte $f_n := y_n'|_K \in C(K)$. Die Folge (f_n) ist beschränkt und gleichgradig stetig, denn

$$|f_n(y) - f_n(\tilde{y})| \leq \|y_n'\|\|y - \tilde{y}\| \leq C\|y - \tilde{y}\|, \quad n \in \mathbb{N},\ y, \tilde{y} \in K.$$

Der Satz von Arzelà–Ascoli gibt die Existenz einer konvergenten Teilfolge (f_{n_k}). Es folgt:

$$\|T'y_{n_l}' - T'y_{n_m}'\| = \sup_{x \in B_X(0,1)} \|y_{n_l}'(Tx) - y_{n_m}'(Tx)\| \leq \|f_{n_l} - f_{n_m}\|_\infty,$$

d.h. $T'y_{n_k}'$ ist eine Cauchyfolge in X'. Somit folgt die Behauptung.

"$\Leftarrow$": Sei T' kompakt. Dann folgt aus dem ersten Beweisteil, dass T'' kompakt ist. Bemerkung 6.21 liefert $T''\iota_X = \iota_Y T$, d.h. der Wertbereich von $T''\iota_X$ ist im abgeschlossenen Unterraum im ι_Y enthalten, also $T = \iota_Y^{-1} T'' \iota_X$. Daraus folgt die Kompaktheit von T. □

7. L_p Räume I.

In diesem Abschnitt sei (M, Σ, μ) stets ein Maßraum.

Definition 7.1.

(a) *Sei $1 \leq p < \infty$. Setze $\|f\|_p := \Big(\int\limits_M |f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}$.*

(b) *Sei $f : M \to \mathbb{K}$ messbar. Dann heißt f* wesentlich beschränkt, *falls ein $\alpha > 0$ existiert mit $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0$. Ferner heißt*

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \geq 0 :\ \mu(\{x \in X :\ |f(x)| > \alpha\} = 0)\}$$

das wesentliche Supremum von f.

(c) *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Definiere*

$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(M, \Sigma, \mu, \mathbb{K}) := \big\{f : f : M \to \mathbb{K} \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty\big\}.$$

Bemerkung 7.2.

(a) *$\|\cdot\|_p$ ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$.*

(b) *Sei $f \in \mathcal{L}^p$. Dann ist $\|f\|_p = 0$ genau dann wenn*

$$f \in \mathcal{N} := \{f :\ \ f \text{ messbar und } f = 0\ \mu\text{-fast überall}\}.$$

(c) *$\mathcal{L}^p$ ist ein Vektorraum.*

(d) *$\mathcal{N}$ ist ein Unterraum von $\mathcal{M}$, dem Vektorraum der messbaren Funktionen (auch von $\mathcal{L}^p$), und*

$$f \sim g \quad \overset{Def.}{\Longleftrightarrow} \quad f - g \in \mathcal{N}$$

definiert eine Äquivalenzrelation

Definition 7.3. *Der Raum L^∞ ist definiert durch:*

$$L^\infty(M,\mu) := \mathcal{L}(M,\Sigma,\mu,\mathbb{K})/\mathcal{N}, \qquad \|[f]\|_\infty := \|f\|_\infty, \qquad \forall [f] \in L^\infty.$$

Satz 7.4.

(a) *$|f| \leq \|f\|_\infty$ μ-fast überall.*
(b) *$\|\cdot\|_\infty$ ist ein Norm.*
(c) *$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \Longrightarrow$ es existiert ein $A \in \Sigma$ mit $\mu(A^c) = 0$ und $f_n \to f$ gleichmässig auf A.*
(d) *$(L^\infty(M,\mu), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.*

Proof. Ohne Beweis. □

Definition 7.5. *Sei $1 \leq p < \infty$*

$$L^p(M,\mu) := (M,\Sigma,\mu,\mathbb{K})/\mathcal{N}, \qquad \|[f]\|_p := \|f\|_p, \qquad \forall [f] \in L^p.$$

Satz 7.6 (Höldersche Ungleichung)**.** *Es sei $1 \leq p,q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ (interpretiere $1/\infty = 0$). Desweiteren seien $f \in L^p(M,\mu)$ und $g \in L^q(M,\mu)$. Dann ist $f \cdot g \in L^1(M,\mu)$ und*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Proof. Die Fälle $p = 1, \infty$ sind trivial. Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $f, g \neq 0$. Dann gilt

$$ab \leq \tfrac{a^p}{p} + \tfrac{b^q}{q} \qquad \text{(Youngsche Ungleichung).}$$

(Der Beweis dieser Ungleichung ist elementar.) Natürlich ist fg messbar. Seien $G := g/\|g\|_q$ und $F := f/\|f\|_p$. Anwendung der Youngsche Ungleichung in jedem Punkt $x \in M$ ergibt nach Integration

$$\int\limits_M |F(x)G(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int\limits_M \frac{|F(x)|^p}{p} \,\mathrm{d}\mu(x) + \int\limits_M \frac{|G(x)|^q}{q} \,\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und die Behauptung folgt. □

Satz 7.7 (Minkowskische Ungleichung)**.** *Sei $1 \leq p < \infty$ und $f, g \in L^p(M,\mu)$. Dann gilt*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Proof. Verwende die Höldersche Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &\leq \int\limits_M |f| \cdot |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_M |g| \cdot |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \|f\|_p \cdot \|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \cdot \|(f+g)^{p-1}\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f+g\|_p^{p/q}.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nach Division durch $\|f+g\|_p^{p/q}$ wegen $p-p/q=1$. □

Satz 7.8 (Riesz–Fischer). *Sei $1 \le p < \infty$. Dann ist $L^p(M,\mu)$ vollständig.*

Proof. Sei $f_n \in L^p(M,\mu)$ mit $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p = M < \infty$. Nach Satz 2.11 genügt es zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^\infty f_j$ konvergiert in L^p. Setze $G_n := \sum_{j=1}^n |f_j|$ und $G := \sum_{j=1}^\infty |f_j|$. Dann $\|G_n\|_p \le \sum_{j=1}^n \|f_j\|_p \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Satz von monotoner Konvergenz ergibt

$$\int_M G^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M G_n^p \,\mathrm{d}\mu \le M^p.$$

Dass heißt $G \in L^p(M,\mu)$ und $G(x) = \sum_{j=1}^\infty |f_j(x)| < \infty$ μ-fast überall, insbesondere konvergiert $F(x) := \sum_{j=1}^\infty f_j(x)$ für fast alle $x \in M$. Dann $|F| \le G$, daher $F \in L^p(M,\mu)$. Ferner

$$\Big|F - \sum_{j=1}^n f_j\Big|^p \le (2G)^p \in L^1(M,\mu),$$

nach Satz von Lebesgue

$$\Big\|F - \sum_{j=1}^n f_j\Big\|_p^p = \int_M \Big|F - \sum_{j=1}^n f_j\Big|^p \,\mathrm{d}\mu \to 0$$

□

Satz 7.9. *Nehmen wir an, dass $f_n \in L^p(M,\mu)$ gegen $f \in L^p(M,\mu)$ konvergiert, dann existiert eine Teilfolge f_{n_k}, so dass $f_{n_k}(x)$ konvergiert μ-fast überall.*

Proof. Ohne Beweis. □

Satz 7.10 (Dualität). *Sei $1 \le p < \infty$, und (M,Σ,μ) σ-endlicher Maßraum. Sei $1/p + 1/q = 1$ (so genannte* konjugierte Exponente*). Dann definiert $L^q(M,\mu) \to L^p(M,\mu)'$*

$$J(g)f := \int_M f \cdot g \,\mathrm{d}\mu, \qquad g \in L^q(M,\mu),\ f \in L^p(M,\mu).,$$

einen isometrischen Isomorphismus.

Proof. J ist wohldefiniert nach der Hölderschen Ungleichung. Natürlich ist J linear. J ist isometrisch, denn sei $g \in L^q(M,\mu)$ und setze

$$f := \frac{\overline{g}}{|g|}\Big(\frac{|g|}{\|g\|_q}\Big)^{q/p}.$$

Dann

$$\|f\|_p = \int_M \left(\frac{|\overline{g}|}{|g|}\right)^p \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \,\mathrm{d}\mu = 1$$

und $\int_M fg \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_q$. Es bleibt die Surjektivität von J zu zeigen.

1. Fall $\mu(M) < \infty$: Sei $\varphi \in L^p(M,\mu)'$. Betrachte $\nu : \Sigma \to \mathbb{K}$, $\nu(A) := \varphi(\chi_A)$ ($\chi_A \in L^p(M,\mu)$). ν ist ein signiertes (komplexes) Maß. Ferner ist ν absolut stetig bezüglich μ, denn $A \in \Sigma$ und $\mu(A) = 0$ impliziert $\chi_A = 0$ μ-fast überall, d.h. $\chi_A = 0$ in $L^p(M,\mu)$, also $\nu(A) = \varphi(\chi_A) = 0$. Satz von Radony–Nikodým ergibt $g \in L^1(M,\mu)$ mit

$$\nu(A) = \int\limits_A g \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M \chi_A g \,\mathrm{d}\mu \quad \forall A \in \Sigma.$$

Also wegen Linearität

$$\varphi(f) = \int\limits_M fg \,\mathrm{d}\mu \quad \forall \text{ Treppenfunktionen } f. \tag{3}$$

Ferner $|\varphi(f)| \le C'\|f\|_\infty$. Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^\infty(M,\mu)$ also gilt (3) für $f \in L^\infty(M,\mu)$. Wir zeigen nun $g \in L^q(M,\mu)$. Sei erst $q < \infty$. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|g(x)|^q}{g(x)} & g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4}$$

f ist messbar und $|g|^q = fg = |f|^p$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{x \in M : |f(x)| \le n\}$. Dann ist $\chi_{A_n} f \in L^\infty(M,\mu)$ und

$$\begin{aligned} \int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M \chi_{A_n} fg \,\mathrm{d}\mu = \varphi(\chi_{A_n} f) \le \|\varphi\| \|\chi_{A_n} f\|_p = \\ = \|\varphi\| \Big(\int\limits_{A_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} = \|\varphi\| \Big(\int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} \\ \implies \int\limits_{A_n} |g|^q \le \|\varphi\|^q \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Satz von Beppo Levi(monotone Konvergenz) gibt $g \in L^q(M,\mu)$.
Jetzt betrachten wir der Fall $q = \infty$. Dann $|g| \le \|\varphi\|$, denn sei $A := \{x \in X : |g(x)| > \|\varphi\|\}$. Setze $f := \chi_A |g|/g$, $f \in L^\infty(M,\mu)$. Nehmen wir $\mu(A) > 0$ an.

$$\mu(A)\|\varphi\| < \int\limits_A |g| \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M fg \,\mathrm{d}\mu = \varphi(f) \le \|\varphi\| \cdot \|f\|_1,$$

und nach Annahme $\implies \mu(A) < \|f\|_1$, Widerspruch mit $\mu(A) = \|f\|_1$. Also $g \in L^\infty(M,\mu)$.

Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^p(M,\mu)$ also $\varphi = Jg$.

2. Fall, $\mu(M) = \infty$: Es sei $M = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$ mit $\mu(M_n) < \infty$, und M_n paarweise disjunkt. Sei $\varphi \in L^p(M,\mu)'$. Setze $\varphi_n(f) := \varphi(\chi_{M_n} f)$, für $f \in L^p(M_n,\mu_n)$, wobei $\mu_n(A) := \mu(M_n \cap A)$. Dann $\|\varphi_n\| \le \|\varphi\|$, insbesondere $\varphi_n \in L^p(M_n,\mu_n)'$. Verwende jetzt den ersten Fall um $g_n \in L^q(M_n,\mu_n)$ zu bekommen. Setze $g := \sum_{n=1}^\infty g_n$ (in jedem Punkt nur ein Summand, g_n wird durch 0 fortgesetzt auf M_n^c). Es ist $g \in L^q(M,\mu)$ und $\varphi = Jg$ zu zeigen. Sei $A_n := \bigcup_{j=1}^n M_j$ und f wie in (4)

$$\begin{aligned}\int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^n \int\limits_{M_j} fg \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \int\limits_{M_j} \chi_{M_j} f g_j \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \varphi(\chi_{M_j} f) \\ &= \varphi(\sum_{j=1}^n \chi_{M_j} f) \le \sum_{j=1}^n \|\varphi\| \|\chi_{M_j} f\|_p \\ &= \|\varphi\| \cdot \Big(\sum_{j=1}^n \int\limits_M |\chi_{M_j} f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} = \|\varphi\| \cdot \Big(\int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\int_{A_n} |g|^q \mathrm{d}\mu \le \|\varphi\|$, und nach Beppo Levi Theorem $g \in L^q(M,\mu)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \varphi(\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n} f) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\chi_{A_n} f) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} fg \\ &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_M \chi_{A_n} fg \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int\limits_M fg.\end{aligned}$$

□

Satz 7.11 (L^p Interpolation Ungleichung)**.** *Seien $p_0, p_1 \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$ und $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Sind $f \in L^{p_0}(M,\mu) \cap L^{p_1}(M,\mu)$, dann ist $f \in L^{p_\theta}(M,\mu)$ und es gilt*

$$\|f\|_{p_\theta} \le \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

Proof. Setze $g := |f|^{(1-\theta)p_\theta}$ und $h := |f|^{\theta p_\theta}$. Dann ist $gh = |f|^{(1-\theta)p_\theta + \theta p_\theta} = |f|^{p_\theta}$, ferner $g \in L^{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}}(M,\mu)$ und $h \in L^{\frac{p_1}{\theta p_\theta}}(M,\mu)$ und

$$\|f\|_{p_\theta}^{p_\theta} = \|gh\|_1 \le \|g\|_{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}} \cdot \|h\|_{\frac{p_1}{\theta p_\theta}} = \|f\|_{p_0}^{(1-\theta)p_\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta p_\theta},$$

mit der Verwendung der Hölderschen Ungleichung. □

Satz 7.12 (Verallgemeinerte Hölder-Ungleichung)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 \le p_i \le \infty$, $f_i \in L^{p_i}$ für $i = 1,\dots,m$. Sei ferner $1 \le p \le \infty$ so, dass $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. Dann gilt*

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L^p \quad \textit{und} \quad \Big\|\prod_{i=1}^n f_i\Big\|_p \le \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

Proof. ÜA. □

Definition und Satz 7.13. *(a) $L^1 \cap L^\infty(M,\mu) := L^1(M,\mu) \cap L^\infty(M,\mu)$ versehen mit der Norm $\|f\|_{1\cap\infty} := \|f\|_1 + \|f\|_\infty$ ist ein Banachraum.*

(b) *Definiere*

$$L^1 + L^\infty(M,\mu) := \{f : M \to \mathbb{K} \text{ mb.} : \exists g \in L^1(M,\mu),\ h \in L^\infty(M,\mu) \text{ mit } f = g + h\}.$$

Die Abbildung

$$\|f\|_{1+\infty} := \inf\{\|h\|_1 + \|g\|_\infty :\ f = g + h : h \in L^1(M,\mu),\ g \in L^\infty(M,\mu)\}.$$

ist eine Norm, mit der $L^1 + L^\infty$ ein Banachraum ist.

Proof. ÜA. □

Satz 7.14. *Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gilt $L_p(M,\mu) \subseteq L_1 + L_\infty(M,\mu)$.*

Proof. Der Fall $p = \infty$ ist trivial. Sei $f \in L^p(M,\mu)$. Setze $A := \{x \in M :\ |f(x)| \ge 1\}$ und $h := \chi_A f$, $g := \chi_{M\setminus A} f$. Dann $g \in L^\infty(M,\mu)$ und $h \in L^1(M,\mu)$, denn

$$\int_M |h| \,\mathrm{d}\mu = \int_A |f| \,\mathrm{d}\mu \le \int_A |f|^p \,\mathrm{d}\mu \le \int_M |f|^p \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Theorem 7.15 (Riesz–Thorin Konvexitätstheorem)**.** *Sei $T : L_1 + L_\infty \to L_1 + L_\infty$ linear, ferner seien $p_0, p_1, r_0, r_1 \in [1,\infty]$ mit $p_0 < p_1$ und $r_0 < r_1$. Sei $\alpha \in (0,1)$ und setze*

$$\tfrac{1}{p_\alpha} := \tfrac{1-\alpha}{p_0} + \tfrac{\alpha}{p_1} \qquad \text{und} \quad \tfrac{1}{r_\alpha} := \tfrac{1-\alpha}{r_0} + \tfrac{\alpha}{r_1}.$$

Dann gilt

$$\|T\|_{\mathscr{L}(L^{p_\alpha}, L^{r_\alpha})} \le \|T\|^{1-\alpha}_{\mathscr{L}(L^{p_0}, L^{r_0})} \|T\|^{\alpha}_{\mathscr{L}(L^{p_1}, L^{r_1})}.$$

Proof. Ohne Beweis. □

8. L_p Räume II.

Im Folgenden sei μ stets das Lebesgue-Maß und Σ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen.

Satz 8.1 (Faltung, Youngsche Ungleichung)**.** *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$. Dann gilt*

(a) *Für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist $y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$*

(b) *Setzt man*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) \,\mathrm{d}y$$

so ist $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_p \qquad 1 \le p \le \infty.$$

Proof. Sei $p = 1$. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \le \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Für $p = \infty$ liefert die Hölder-Ungleichung

$$|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) \,\mathrm{d}y| \le \|f\|_1 \|g\|_\infty,$$

insbesondere existiert $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) \,\mathrm{d}y$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Betrachte nun die Abbildung $T_f g := f * g$. Dann folgt aus dem Riesz–Thorin Konvexitätstheorem, dass $T_f \in \mathscr{L}(L^p, L^p)$ und $\|T_f\|_{\mathscr{L}(L^p,L^p)} \le \|f\|_1$ für $1 \le p \le \infty$, d.h. (b) gilt. Ferner erhalten wir mit Beppo-Levi

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)| \,\mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||\chi_{B(0,r)} g(y)| \,\mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \\
&\le \lim_{r\to\infty} \|f\|_1 \|\chi_{B(0,r)} g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)| \,\mathrm{d}y \right)^p < \infty, \text{ f.a. } x \in \mathbb{R}^d.$$

□

Beispiel 8.2.

(a) *Betrachte*

$$(1-\Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann existiert für jedes $f \in L^p$ eine eindeutige Lösung u. Desweiteren besitzt u die Darstellung

$$u(x) = (k * f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

mit einem Kern $k \in L^1$.

(b) *Betrachte*

$$\begin{aligned}
\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) &= 0, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d \\
u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

Dann existiert für jedes $u_0 \in L^p$ eine eindeutige Lösung u. Desweiteren besitzt u die Darstellung

$$u(t,x) = (k_t * u_0)(x), \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d,$$

mit $k_t \in L^1$ *für* $t > 0$.

Korollar 8.3. *Sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$*, dann definiert die Abbildung* $Tf := f * g$ *einen stetigen linearen Operator auf* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *mit* $\|T\| \leq \|f\|_1$.

Satz 8.4. *Sei* $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$*,* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$*. Dann* $f * g \in C(\mathbb{R}^d)$.

Proof. Wegen $|(f*g)(x)| \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$ existiert $(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für *alle* $x \in \mathbb{R}^d$. Sei $x_n \to x$. Setze $F_n(y) = f(x_n - y)g(y)$ und $F(y) = f(x-y)g(y)$, dann $F_n(y) \to F(y)$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^d$. Anderseits, sei K kompakt so, dass $x_n - \operatorname{supp} f \subseteq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $x_n - y \notin \operatorname{supp} f$ falls $y \notin K$, d.h. $f(x_n - y) = 0$ für $y \notin K$, und so $|F_n(y)| \leq \|f\|_\infty \chi_K(y)|g(y)|$ integrierbare Majorante. Nach Lebesgueschen Satz folgt $\int F_n\,\mathrm{d}y \to \int F\,\mathrm{d}y$. □

Definition 8.5. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$*,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *messbar und setze*

$$O_f := \Big\{ x \in \Omega : \exists V \subset \Omega \text{ offene Umgebung von } x \text{ mit } f(x) = 0 \text{ für f.a. } x \in V \Big\}$$

Dann heißt $\operatorname{supp} f := \Omega \setminus O_f$ *der* Träger *von* f.

Satz 8.6. *Sei* $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$*,* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$*. Dann gilt*

$$\operatorname{supp}(f*g) \subseteq \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} \tag{5}$$

Proof. Wegen $|(f*g)(x)| \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$ existiert $(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für *alle* $x \in \mathbb{R}^d$. Also

$$(f*g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{(x-\operatorname{supp} f)\cap \operatorname{supp} g} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Falls $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, gilt $(x - \operatorname{supp} f) \cap \operatorname{supp} g = \emptyset$ und $(f*g)(x) = 0$. □

Bemerkung 8.7. *Im Satz 8.6 gilt* $\overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} = \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

Bemerkung 8.8. *Die obige Aussage* (5) *gilt auch für* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$*,* $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$*,* $1 \leq p \leq \infty$.

Satz 8.9. *Seien* $f \in C^k_c(\mathbb{R}^d)$*,* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$*. Dann ist* $f * g \in C^k(\mathbb{R}^d)$*, und* $D^\alpha(f*g) = D^\alpha f * g$*. Insbesondere* $f \in C^\infty_c$*,* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow f*g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Proof. Wie immer $(f*g)(x)$ existiert für alle x. Sei $e_j \in \mathbb{R}^d$ ein Standardbasisvektor, $h \in \mathbb{R}$, $|h| \leq 1$. Setze $K := \operatorname{supp} f + \overline{B}(0,1)$, dies ist auch kompakt. Dann

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{h}((f*g)(x+he_j) - (f*g)(x)) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tfrac{1}{h}(f(x+he_j-y)g(y) - f(x-y))g(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int\limits_{K-x} \tfrac{1}{h}(f(x+he_j-y)g(y) - f(x-y))g(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

wobei der Integrand gegen $D_j f(x-y)g(y)$ für alle y konvergiert. Außerdem gilt

$$\left|\tfrac{1}{h}(f(x+he_j-y)g(y)-f(x-y))g(y)\right| \leq \|D_j f\|_\infty |g(y)|.$$

Nach dem Satz von Lebesgue bekommen wir $D_j(f*g)(x) = ((D_j f)*g)(x)$, und so die Behauptung. □

Definition 8.10. *Eine Folge $(\rho_n)_{n\geq 1}$ von Funktionen mit den Eigenschaften*

(a) $\rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$
(b) $\rho_n \geq 0$
(c) $\operatorname{supp}\rho_n \subseteq B(0,1/n)$
(d) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$

heißt Mollifier.

Beispiel 8.11. *Betrachte $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,* $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq B(0,1)$*, $\rho \geq 0$, $\int \rho = 1$, und definiere $\rho_n(x) := 1/n^d \rho(nx)$.*

Lemma 8.12. *Sei $f \in C(\mathbb{R}^d)$ und $(\rho_n)_{n\geq 1}$ ein Mollifier. Dann konvergiert $\rho_n * f \to f$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^d$.*

Proof. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x-y)-f(x)| \leq \varepsilon$ für $x \in K$ und $|y| \leq \delta$. Also

$$\begin{aligned}(\rho_n * f)(x) - f(x)i &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} (f(x-y)-f(x))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{B(0,1/n)} (f(x-y)-f(x))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

so für $n > 1/\delta$ gilt $|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int \rho_n = \varepsilon$ für $x \in K$. □

Lemma 8.13 (Urysohn, C^∞-Version)**.** *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $K \subseteq \Omega$, K kompakt. Dann existiert ein $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$ und $\varphi(x) = 1$ für $x \in K$.*

Proof. Sei $0 < 1/n < \varepsilon < \varepsilon + 1/n < \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$. Setze $U_\varepsilon := \{y \in \Omega : \operatorname{dist}(y,K) < \varepsilon\} \subseteq \Omega$ und $u = \chi_{U_\varepsilon}$. Dann gilt $\varphi := \rho_n * u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{B}(0,1/n) + \overline{U}_\varepsilon \subseteq \Omega$, also $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \Omega$ ist kompakt. Sei $x \in K$, dann $\varphi(x) = \int_{|y|\leq 1/n} u(x-y)\rho_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_{|y|\leq 1/n} \rho_n(y)\,\mathrm{d}y = 1$. Ferner $\|\varphi\|_\infty \leq \|\rho_n\|_1 \cdot \|u\|_\infty = 1$. Da $\varphi \geq 0$ folgt auch $0 \leq \varphi \leq 1$. □

Satz 8.14. *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Proof. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.
Beh.:$\forall \varepsilon > 0 \exists$ Treppenfunktion $T = \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $A_i \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und $\|T - f\|_p \leq \varepsilon$.
Maßtheorie.
Beh.:$\forall \varepsilon > 0 \exists u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$:$\|u - \chi_{A_i}\|_p \leq \varepsilon$.
Wähle eine offene Menge O und eine kompakte Menge K mit $K \subset A_i \subset O$

und $|O \setminus K| \leq \varepsilon$ (Existenz: Maßtheorie). Dann existiert nach Lemma 8.13 ein $\varphi \in C_c^\infty(O)$ mit $\varphi \equiv 1$ auf K. Es gilt:

$$\int\limits_O |\chi_{A_i} - \varphi|^p = \int\limits_{O\setminus K} |\chi_{A_i} - \varphi|^p \leq 2^p |O \setminus K| \leq 2^p \varepsilon.$$

□

Satz 8.15. *Sei $(\rho_n)_{n\geq 1}$ ein Mollifier.*

(a) Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|\rho_n * f - f\|_p \to 0$.
(b) Sei $f \in BUC(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|\rho_n * f - f\|_\infty \to 0$

Proof. (a) Nach Satz 8.14 existiert für $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\|f - g\| \leq \varepsilon$. Satz 8.6 liefert

$$\operatorname{supp}(\rho_n * g) \subseteq \overline{B(0, 1/n)} + \operatorname{supp} g \subseteq K, \qquad \text{wobei } K \text{ compact.}$$

Da nach Lemma 8.12 $\rho_n * g$ gleichmässig auf K gegen g konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\rho_n * g - g\|_p^p = \int\limits_K |\rho_n * g - g|^p \leq \varepsilon^p |K|.$$

Daraus folgt mit der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\|\rho_n * f - f\|_p &\leq \|\rho_n * (f - g)\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g - f\|_p \leq \varepsilon + \varepsilon |K|^{\frac{1}{p}} + \varepsilon.\end{aligned}$$

(b) Wiederhole den Beweis von Lemma 8.12. □

Korollar 8.16. *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.*

Proof. Setze $\Omega_n := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Omega^c) > \frac{1}{n}\}$ und

$$f_n(x) = \begin{matrix} f(x) & , & x \in \Omega_n \\ 0 & , & \text{sonst} \end{matrix}$$

Dann gilt nach dem Satz von Lebesgue $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$, d.h für $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 mit $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$.
Setze $g_m := \rho_m * f_n$, wobei ρ_m ein Mollifer ist. Dann existiert nach Satz 8.15 ein $m_0 > n_0$ mit $\|g_m - f_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^d} \leq \varepsilon$, $m \geq m_0$. Desweiteren gilt

$$\operatorname{supp} g_m = \operatorname{supp} \rho_m + \operatorname{supp} f_{n_0} \subset \Omega, \quad m \geq m_0.$$

Damit erhalten wir

$$\|g_m - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|g_m - f_{n_0}\|_{L^p(\Omega)} + \|f_{n_0} - f\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon, \quad m \geq m_0.$$

□

Satz 8.17 (Zerlegung der Eins)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Seien ferner*

$$K_i \subset \Omega_i \subset \overline{\Omega}_i \subset \Omega, \qquad i \in \mathbb{N},$$

mit $\overline{\Omega}_i$ kompakt und

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i = \Omega,$$

so, dass für alle $x \in \Omega$ existiert eine Umgebung $U(x)$, die nur endlich viele Ω_j trifft (diese Überdeckung heißt lokal endlich*). Nehmen wir ferner an, dass $K_j \cap K_i = \emptyset$, falls $i \neq j$.*
Dann existieren $\varphi_i \in C_c^\infty(\Omega)$, $i \in \mathbb{N}$ mit

(a) $\varphi_i \geq 0$
(b) $\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x) = 1$, *falls* $x \in \Omega$
(c) $0 \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i \leq 1$.

Außerdem gilt $\varphi_j(x) = 1$ für $x \in K_j$.

Proof. 1. Schritt: Nehmen wir an dass wir die folgende Situation haben

$$K_j \subseteq V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq U_j \subseteq \Omega_j$$

wobei $\overline{V}_j$ kompakt, $U_i \cap K_j = \emptyset$ falls $i \neq j$ und V_j, U_j sind lokal endliche Überdeckungen von Ω. Wähle φ_j' nach Lemma 8.13 zu U_j und $\overline{V}_j$. Dann gilt $\varphi(x) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i'(x) > 0$, wobei lokal in Ω nur endlich viele Summanden von 0 verschieden sind. Setze Setze $\varphi_j(x) := \varphi_j'(x)/\varphi(x)$. Nach Konstruktion haben die φ_i die gewünschte Eigenschaften.

2. Schritt, Disjunktisierung von Ω_j und K_j: $U_j := \Omega_j \setminus \bigcup_{i \neq j} K_j$. Natürlich gilt $K_j \subseteq U_j \subseteq \Omega_j$. Wir behaupten, dass U_j offen ist. Sei $x \in U_j$ und $U(x) \subseteq \Omega_j$ eine Umgebung von x so, dass $J := \{i : \Omega_i \cap U(x) \neq \emptyset\}$ endlich ist. Für $j \neq k \in J$ existiert eine Umgebung $W_k(x) \subseteq U(x)$ von x mit $W_k(x) \cap K_k = \emptyset$. Setze $W(x) := \cap_{k \in J} W_k(x)$, die ist eine Umgebung von x mit $W(x) \subseteq U_j$ und $W(x) \cap K_i = \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, also U_j ist offen. Sei jetzt $x \in \Omega$, liegt dann $x \in \Omega_j$ für ein j, dann entweder liegt es in U_j oder in K_i für ein $i \neq j$. Die Überdeckung U_j is lokal endlich da Ω_j lokal endlich ist.

3. Schritt, Konstruktion von V_j: Sei $V_1 := U_1$. Angenommen V_j, $j < n$ konstruiert ist mit der Eigenschaft

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} V_j \cup \bigcup_{j=n}^{\infty} U_j = \Omega,$$

sei F_n eine abgeschlossene Umgebung von ∂U_n die erfüllt

$$\partial U_n \subseteq F_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{n-1} V_j \cup \bigcup_{j=n+1}^{\infty} U_j.$$

Falls $U_n \neq 0$, können wir eine kleinere Umgebung $\partial U_n \subseteq F'_n \subseteq F_n$ finden damit $U_n \setminus F'_n$ nichtleer wird. Setze $V_n := U_n \setminus F'_n$. Dann

$$U_n \subseteq V_n \cup F'_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_j \cup \bigcup_{j=n+1}^{\infty} U_j.$$

Also V_j ist eine offene Überdeckung, die natürlich lokal endlich bleibt. $\square$

Satz 8.18 (Zerlegung der Eins)**.** *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$, mit $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann existiert $\varphi_i \in C_c^\infty(\Omega_j)$ mit*

(a) $\varphi_i \geq 0$
(b) $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1$, *falls* $x \in K$
(c) $0 \leq \sum_{i=1}^n \varphi_i \leq 1$.

Proof. Konstruiere $V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq \Omega_j$ mit V_j offene Überdeckung von K und $\overline{V}_j$ kompakt. Dann wiederhole Schritt 1, von dem obigen Beweis. (Oder verwende Satz 8.17) $\square$

Bemerkung 8.19. *Das System $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ heißt* der Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins *zu K.*

9. Sobolev Räume I.

In diesem Abschnitt es sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

Definition 9.1 (Distributionelle Ableitung)**.** *Sei $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Falls die Identität*

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

gilt, heißt g die distributionelle Ableitung *von f, und wir schreiben $D^\alpha f = g$, $f^{(\alpha)} = g$ oder $f = \partial^\alpha g$.*

Bemerkung 9.2.

(a) Die distributionelle Ableitung ist eindeutig, insbesondere ist die obige Definition sinnvoll, denn

$$\int_\Omega (f-g)\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad f - g = 0 \text{ fast überall.}$$

(b) Falls $f \in C^m(\Omega)$. Dann für jede $|\alpha| \leq m$ ist $D^\alpha f$ die klassische partielle Ableitung von f.

Definition 9.3. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$. Definiere*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq m \ \exists D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}$$

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Satz 9.4. *$W^{m,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum.*

Proof. Klar: normierter Vektorraum. Um die Vollständigkeit zu zeigen, nehme $(f_n) \in W^{m,p}(\Omega)$ eine Cauchyfolge, d.h. die Folgen $(D^\alpha f_n) \subseteq L^p(\Omega)$ sind alle Cauchyfolgen. Daher konvergieren die auch, bezeichne die Grenzwerten mit f_α. Wir zeigen nun $D^\alpha f = f_\alpha$:

$$\int_\Omega f_\alpha \varphi \leftarrow \int_\Omega D^\alpha f_n \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_n D^\alpha \varphi \to (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \varphi.$$

Die Behauptung folgt. □

Satz 9.5. *Sei $1 < p < \infty$. Dann ist $W^{m,p}(\Omega)$ separabel und reflexiv. $W^{m,1}(\Omega)$ ist separabel.*

Proof. Definiere die stetige Abbildung

$$J : W^{m,p}(\Omega) \to \underbrace{L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)}_{M} =: X,$$

wobei $M =$ die Anzahl der Multiindizes α mit $|\alpha| \leq m$ ist, durch $(Jf)(x) := (D^\alpha f)_{|\alpha| \leq m}$. Dann ist J stetig invertierbar, bildet also auf einen angeschlossenen Unterraum von X ab. Falls $1 \leq p < \infty$ ist, ist X separabel, ist zusätzlich $p > 1$, folgt die Reflexivität von X. Nun verwende Satz 6.8 und Satz 2.16, um die Behauptung zu erhalten. □

Lemma 9.6 (Lokale Approximation)**.** *Sei $1 \leq p < \infty$, $f \in W^{m,p}(\Omega)$ und $D \subseteq \Omega$ offen mit $\overline{D} \subseteq \Omega$. Betrachte $\delta = \operatorname{dist}(D, \partial\Omega) > 0$ und den Mollifier η_ε, $\varepsilon < \delta$. Setze $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * (\chi_\Omega f)$. Dann $f_\varepsilon \to f$ in $W^{m,p}(D)$.*

Proof.

$$\begin{aligned} D^\alpha f_\varepsilon(x) = D^\alpha \eta_\varepsilon * (\chi_\Omega f)(x) &= \int_\Omega D^\alpha(\varphi_\varepsilon(x-y)) f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y \overset{\text{Träger!}}{=} \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y) D^\alpha f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (D^\alpha f)_\varepsilon(x), \quad x \in D. \end{aligned}$$

Also $f_\varepsilon \in W^{m,p}(D)$ und nach Satz 8.15 $D^\alpha f_\varepsilon = (D^\alpha f)_\varepsilon \to D^\alpha f$. □

Satz 9.7. *Für $1 \leq p < \infty$ ist $W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Proof. Betrachte eine lokal finite Überdeckung Ω_k von Ω, $\overline{\Omega_k} \subseteq \Omega$ kompakt (siehe Satz 8.17). Sei φ_k Zerlegung der Eins, $\varepsilon > 0$ und $c_k > 0$ später noch zu bestimmen. Für $\varepsilon > 0$ existiert nach Lemma 9.6 $f_{k,\varepsilon} \in W^{m,p}(\Omega_k)$ mit $\|f - f_{k,\varepsilon}\| \leq c_k \varepsilon$. Setze

$$f_\varepsilon := \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k f_k, \text{ also } f_\varepsilon - f := \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k (f_{k,\varepsilon} - f)$$

(lokal nür endlich viele Summanden). Die Produktregel gilt, denn für $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \varphi_k f D_i\psi = \int_\Omega (D_i(\varphi_k\psi) - D_i\varphi_k\psi)f = -\int_\Omega (\varphi_k\psi D_i f + \psi f D_i\varphi_k).$$

Daher ist $\varphi_k f \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$D_i(\varphi_k f) = D_i\varphi_k \cdot f + \varphi_k D_i f.$$

Ferner gilt induktiv auch $\varphi_k f \in W^{m,p}(\Omega)$, und für $|\alpha| \le m$

$$D^\alpha(\varphi_k f) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\varphi_k \cdot D^\beta f.$$

Wir erhalten

$$D^\alpha f_\varepsilon - D^\alpha f = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{k\in\mathbb{N}} D^{\alpha-\beta}\varphi_k(D^\beta f_{k,\varepsilon} - D^\beta f).$$

$$\begin{aligned}\|D^\alpha f_\varepsilon - D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} &\le C\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega})}\|D^\beta f_{k,\varepsilon} - D^\beta f\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le C\varepsilon \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k|\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega})} \le \varepsilon,\end{aligned}$$

falls $c_k \le 2^{-k}(\|\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega})} + 1)^{-1}/C$. □

Satz 9.8 (Produktregel)**.** *Sei* $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *und* $f \in W^{m,p}(\Omega)$, $g \in W^{m,q}(\Omega)$*. Dann* $fg \in W^{m,1}(\Omega)$ *und* $D_i(fg) = D_i f \cdot g + f D_i g$*.*

Proof. Sei $p < \infty$. Nehme $f_k \in W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ mit $f_k \to f$. Wir haben gesehen $D_i(f_k g) = D_i f_k \cdot g + f_k D_i g$.

$$\begin{aligned}\int_\Omega D_i\varphi \cdot fg &= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega D_i\varphi \cdot f_k g = -\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \varphi D_i(f_k g) \\ &= -\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \varphi(D_i f_k \cdot g + f_k D_i g) = -\int_\Omega \varphi(D_i f \cdot g + f D_i g).\end{aligned}$$

Der Rest folgt mit Induktion. □

Satz 9.9 (Kettenregel)**.** *Seien* $\Omega', \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *offen, und* $\Phi : \Omega' \to \Omega$ *ein* C^1*-Diffeomorphismus mit beschränkten Ableitungen* $D\Phi$, $D\Phi^{-1}$*. Sei* $1 \le p \le \infty$*. Dann gilt für* $f \in W^{1,p}(\Omega)$*:*

(a) $f \circ \Phi \in W^{1,p}(\Omega')$*.*
(b) $\partial(f \circ \Phi) = \partial f \circ \Phi \cdot \partial\Phi$*.*

Proof. ÜA. □

Satz 9.10. *Sei $I \neq \emptyset$ ein offenes Interval und $f \in W^{1,1}(I)$. Dann existiert eine Nullmenge N so, dass für $x, y \in I \setminus N$*

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(z)\,\mathrm{d}z \tag{6}$$

gilt.

Proof. Sei $f_k \in C^\infty(I) \cap W^{1,1}(I)$. Dann gilt

$$f_k(y) - f_k(x) = \int_x^y f_k'(z)\,\mathrm{d}z \to \int_x^y f'(z)\,\mathrm{d}z.$$

Da f_k in $L^1(I)$ konvergiert, besitzt sie eine punktweis fast überall konvergente Teilfolge, also $\lim_{l\to\infty} f_{k_l}(z) = f(z)$ für fast alle $z \in I$. □

Satz 9.11. *Sei $I \neq \emptyset$ ein offenes Interval und $f, g \in L^1(I)$ mit*

$$f(y) - f(x) = \int_x^y g(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{für } x, y \in I \setminus N,$$

für eine Nullmenge N. Dann ist $f \in W^{1,1}(I)$ und $f' = g$.

Proof. Sei $\psi \in C_c^\infty(I)$, und $c, d \in I$ so, dass $\operatorname{supp}\psi \in [c, d]$ und $f(y) - f(c) = \int_c^y g(z)\,\mathrm{d}z$ für fast alle $y \in I$. Dann

$$\begin{aligned}\int_c^d \psi'(y)(f(y) - f(c))\,\mathrm{d}y &= \int_c^d \int_c^y \psi'(y) g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_x^d \psi'(y)\,\mathrm{d}y g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_c^d \psi(x) g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Satz 9.12. *Sei $f \in W^{1,1}(I)$. Dann existiert ein $g \in C(\overline{I})$ so, dass $f = g$ fast überall.*

Proof. Sei $I = (a, b)$. Definiere $h(y) := \int_a^y f'(z)\,\mathrm{d}z$. Die Funktion h ist stetig auf I, denn $f' \in L^1(I)$. Außerdem existiert $\lim_{x\to a,b} h(x)$, also $h \in C(\overline{I})$. Seien x, z so, dass $f(z) - f(x) = \int_x^z f'(z)\,\mathrm{d}z$. Sei $c := f(z) - h(z)$ und setze $g(y) := h(y) + c$. Nach Definition $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in I$. □

Bemerkung 9.13. *Die obige Integralgleichung impliziert nicht nur Stetigkeit sondern auch* Absolutstetigkeit. *Genauer ist Absolutstetigkeit äequivalent zu* (6) *(vgl. Maßtheorie).*

Satz 9.14. *Es sei $1 \leq p \leq \infty$ und $I = (a, b)$. Dann sind die Einbettungen $W^{m,p}(I) \hookrightarrow W^{1,p}(I) \hookrightarrow W^{1,1}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ stetig. Falls $p > 1$, ist die Einbettung $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ kompakt.*

Proof. Es ist klar, dass die Einbettungen

$$W^{m,p}(I) \hookrightarrow W^{1,p}(I) \hookrightarrow W^{1,1}(I)$$

stetig sind.
Es bleibt zu Zeigen, dass $W^{1,1(I)} \hookrightarrow C(\overline{I})$ stetig ist. Sei $f \in W^{1,1}(I)$. Nach Satz 9.10 existiert eine Nullmenge N mit

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t, \quad x, y \in I \setminus N.$$

Dann gilt

$$|f(y)| = \Big|f(x) + \int_x^y f'\Big| \le |f(x)| + \int_x^y |f'| \le |f(x)| + \|f'\|_{L^1(I)}.$$

Integration bzgl. x über I liefert

$$(b-a)|f(y)| \le \int_I |f(y)|\,\mathrm{d}x \le \|f\|_{L^1(I)} + (b-a)\|f'\|_{L^1(I)}, \quad y \in I \setminus N,$$

d.h. $\|f\|_{L^\infty(I)} \le C\|f\|_{W^{1,1}(I)}$. Da $C^\infty(I) \cap W^{1,1}(I)$ dicht in $W^{1,1}(I)$ ist, folgt die Behauptung (Beachte: für $f \in C(\overline{I})$ gilt $\|u\|_{L^\infty(I)} = \|u\|_\infty$..
Nun sei $p > 1$. Dann gilt

$$|f(y) - f(x)|^p \le \Big(\int_x^y |f'|\Big)^p \overset{\text{Hölder}}{\le} (x-y)^{p/q} \int_x^y |f'|^p \le (x-y)^{p/q} \int_a^b |f'|^p,$$

d.h.

$$|f(x) - f(y)| \le (x-y)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{W^{1,1}(I)}, \quad f \in W^{1,1}(I).$$

Also ist $B_{W^{1,p}(I),1}(0) \subset C(I)$ gleichmäßig gleichgradig stetig. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Arzelà–Ascoli. □

10. Sobolev Räume II. – Einbettungssätze

Satz 10.1. *Für $1 \le p < \infty$ ist der Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.*

Proof. Seien $\varepsilon > 0$, $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ und $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subseteq B(0,2)$ und $\psi(x) = 1$ für $x \in \overline{B(0,1)}$. Setze $\psi_j(x) := \psi(x/j)$.
Beh. $\psi_j f \to f$ in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.
Die Produktregel (Satz 9.8) liefert

$$|D^\alpha(\psi_j f - f)| \le C \sum^{\beta \le \alpha} |D^\beta(\psi_j - 1)| \cdot |D_{\alpha-\beta} f|,$$

also

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha(\psi_j f - f)|^p i &\le C' \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\beta\le\alpha} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\ &= C' \sum_{\beta\le\alpha} \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\ &+ C' \sum_{\beta\le\alpha} \int_{B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\ &= C' \sum_{\beta\le\alpha} \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\ &\le C'' \sum_{\beta\le\alpha} \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,j)} |D^{\alpha-\beta} f|^p \le \varepsilon^p,\end{aligned}$$

falls j groß genug ist.
Nun betrachten wir einen Mollifier (ρ_n). Dann hat $\rho_n * \psi_j f$ kompakten Träger und ist glatt. Nach Satz 8.9 und 8.15 gilt $D_\alpha(\rho_n * (\psi_j f)) = \rho_n * D_\alpha(\psi_j f) \to D_\alpha \psi_j f$ für $n \to \infty$. Sei also erst j groß und dann n genügend groß, so dass

$$\|f - \rho_n * (\psi_j f)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \le \|f - \psi_j f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} + \|\psi_j f - \rho_n * (\psi_j f)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon.$$

□

Satz 10.2. *Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gilt*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$$

mit stetiger Einbettung, d.h. für eine Konstante C_p

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C_p \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

Proof. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $1 \le p < \infty$. Setze $G(s) := |s|^{p-1}s$. Dann gilt $\psi := G(\varphi) \in C_c^1(\mathbb{R})$ und $\psi' = G'(\varphi)\varphi' = p|\varphi|^{p-1}\varphi'$. Also erhalten wir für $x \in \mathbb{R}$

$$G(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|\varphi(t)|^{p-1}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nach der Hölderschen Ungleichung folgt

$$|G(\varphi(x))| = |\varphi(x)|^p \le p\|\varphi\|_p^{p-1}\|\varphi'\|_p$$

und

$$|\varphi(x)| \le C\|\varphi\|_p^{(p-1)/p}\|\varphi\|_p^{1/p}.$$

Die Youngsche Ungleichung liefert

$$|\varphi(x)| \le C\frac{p-1}{p}\|\varphi\|_p + C\frac{1}{p}\|\varphi'\|_p \le C\|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}. \tag{7}$$

Sei nun $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Nach Satz 10.1 existiert $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Mit (7) ist dann u_n eine Cauchyfolge in $L^\infty(\mathbb{R})$ und die Behauptung folgt. □

Lemma 10.3. *Sei $d \geq 2$ und $f_1, \dots, f_d \in L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})$. Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $1 \leq i \leq d$ setze*

$$\widetilde{x}_i := (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$$

und sei

$$f(x) = f_1(\widetilde{x}_1) f_2(\widetilde{x}_2) \cdots f_n(\widetilde{x}_d) \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Proof. Der Fall $d = 2$ ist trivial. Wir beweisen mit Induktion. Sei $d \geq 3$ und nehme an, dass für alle $2 \leq k < d$ die Behauptung wahr ist. Dann

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x_d \, \mathrm{d}x_1 \dots \, \mathrm{d}x_{d-1}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} |f_d(\widetilde{x}_d)| \int\limits_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{d-1} |f_i(\widetilde{x}_i)| \, \mathrm{d}x_d \, \mathrm{d}x_1 \dots \, \mathrm{d}x_{d-1}$$

$$\overset{\text{veralg. Hölder}}{\leq} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_d(\widetilde{x}_d)| \Big(\prod_{i=1}^{d-1} \int\limits_{\mathbb{R}} |f_i(\widetilde{x}_i)|^{d-1} \, \mathrm{d}x_d \Big)^{\frac{1}{d-1}} \mathrm{d}x_1 \dots \, \mathrm{d}x_{d-1}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f_d\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} |f_i(\widetilde{x}_i)|^{d-1} \, \mathrm{d}x_d \Big)^{\frac{1}{d-2}} \mathrm{d}x_1 \dots \, \mathrm{d}x_{d-1} \Big)^{\frac{d-2}{d-1}}$$

$$\overset{\text{Ind.}}{\leq} \|f_d\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})} \prod_{i=1}^{d-1} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} |f_i(\widetilde{x}_i)|^{d-1} \, \mathrm{d}x_d \, \mathrm{d}\widetilde{x}_i \Big)^{\frac{1}{d-1}}$$

$$= \prod_{i=1}^{d-1} \|f_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

□

Theorem 10.4 (Sobolev)**.** *Sei $1 \leq p < d$. Dann ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^d), \qquad \textit{mit } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$$

stetig und es existiert $C = C_{p,d}$ mit

$$\|f\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla f\|_{L^p} \qquad \forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d).$$

Proof. 1. Schritt: $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$.
Sei $1 \le i \le n$.

$$\begin{aligned}|u(x_1, x_2, \dots, x_d)| &= \Big| \int\limits_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d)\, \mathrm{d}t \Big| \\ &\le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d) \Big|\, \mathrm{d}t \\ &:= f_i(\tilde{x}_i).\end{aligned}$$

Also $\|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{d-1})} \le \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.
Es gilt $|u(x)|^d \le \prod_{i=1}^d |f_i(\widetilde{x}_i)|$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}}\, \mathrm{d}x \le \int\limits_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^d |f_i(\widetilde{x}_i)|^{\frac{1}{d-1}}\, \mathrm{d}x = \prod_{i=1}^d \big\| \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d-1}}.$$

Das heißt

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \le \prod_{i=1}^d \big\| \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}}. \tag{8}$$

Wir wenden (8) auf $|u|^t$, $t > 1$ anstatt auf u an. Also

$$\begin{aligned}\|u\|^t_{L^{\frac{td}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} &= \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |u|^{\frac{td}{d-1}}(x)\, \mathrm{d}x \Big)^{\frac{d-1}{d}} \le \prod_{i=1}^d \big\| t|u|^{t-1} \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}} \\ &\le t \prod_{i=1}^d \big\| |u|^{t-1} \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}} \le t \|u\|^{t-1}_{L^{q(t-1)}(\mathbb{R}^d)} \prod_{i=1}^d \big\| \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}}.\end{aligned}$$

Wähle nun t so dass $\frac{td}{d-1} = q(t-1)$, d.h. $t = \frac{d-1}{d} p^*$ (dann $t \ge 1$). Jetzt durch dividieren mit $\|u\|^{t-1}_{L^{q(t-1)}(\mathbb{R}^d)}$ bekommen wir

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \le t \prod_{i=1}^d \big\| \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}} \le C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

die Behauptung für $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$.

2. Schritt: Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Nach Satz 10.1 wähle $u_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|u_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \le C \|\nabla u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. Dies zeigt auch dass u_k eine Cauchyfolge in $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ ist, deshalb ist sie konvergent. Eine Teilfolge konvergiert dann fast überall, benutzen wir die selbe Bezeichnung $u_k(x) \to u(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$. Also $u_k \to u$ in $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$, und $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \le C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. $\square$

Bemerkung 10.5. *Es genügt* $C_{p,d} := \frac{(d-1)p}{d-p}$. *Die optimale Konstante ist bekannt aber kompliziert.*

Satz 10.6. *Sei $1 \leq p < d$. Dann ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d), \qquad r \in [p, p^*]$$

stetig.

Proof. Sei $p \leq r \leq p^*$. Für ein θ gilt $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p^*}$. Verwende dann die Interpolationsungleichung, die Youngsche Ungleichung und Theorem 10.4

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} &\leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|u\|^{1-\theta}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \theta\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + (1-\theta)\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C'\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

□

Theorem 10.7 (Morrey)**.** *Es sei $p > d$. Dann ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

stetig. Ferner existiert ein $C := C_{d,p}$ so, dass für alle $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\theta\|\nabla f\|_{L^p} \qquad \textit{für fast alle } x \in \mathbb{R}^d,$$

wobei $\theta = 1 - \frac{d}{p}$.

Proof. 1. Schritt: Sei $u \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$. Sei Q ein abgeschlossener Würfel $0 \in Q$ mit Seitenlänge r. Sei $x \in Q$, dann $u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}u(tx)\,\mathrm{d}t$. Daraus

$$|u(x) - u(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^d \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right||x_i|\,\mathrm{d}t \leq r\sum_{i=1}^d \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right|\mathrm{d}t.$$

Sei $\bar{u} = |Q|^{-1}\int_Q u(x)\,\mathrm{d}x$. Dann $|\bar{u} - u(0)| \leq |Q|^{-1}\int_Q |u(x) - u(0)|$, und

$$\begin{aligned}|\bar{u} - u_0| &\leq \frac{r}{|Q|}\int_Q\int_0^1 \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right|\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \frac{r}{r^d}\int_0^1\int_Q \sum_{i=1}^d \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{r^{d-1}}\int_0^1 \sum_{i=1}^d \int_{tQ} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right|\mathrm{d}y \cdot \frac{1}{t^d}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{r^{d-1}}\int_0^1 \sum_{i=1}^d \left(\int_Q \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p}|tQ|^{1/q}\cdot\frac{1}{t^d}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{r^{d-1}}\|\nabla u\|_{L^p(Q)}r^{d/q}\int_0^1 \frac{t^{d/q}}{t^d}\,\mathrm{d}t = \frac{r^{1-d/p}}{1-d/p}\|\nabla u\|_{L^p(Q)}.\end{aligned}$$

Natürlich wir können das ganze für x anstatt für 0 wiederholen und auch Q verschieben, also

$$|\bar{u} - u(x)| \leq \frac{r^{1-d/p}}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \qquad \text{für } x \in Q. \tag{9}$$

Daraus

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - \bar{u}| + |\bar{u} - u(y)| \leq \frac{2r^{1-d/p}}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \qquad \text{für } x, y \in Q.$$

Sei nun $x, y \in \mathbb{R}^d$. Es existiert ein Würfel Q der Seitenlänge $r = 2|x-y|$ mit $x, y \in Q$.

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{C|x-y|^\theta}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

2. Schritt: Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Approximiere mit $u_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, d.h. $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Wie im Beweis von Theorem 10.4 folgt

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{C|x-y|^\theta}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

3. Schritt: Wir zeigen $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Sei $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $Q \ni x$ der Einheitswürfel. Aus (9) folgt

$$|u(x)| \leq |\bar{u}| + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq \|u\|_{L^p(Q)} + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq C_{d,p}\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

Schließlich approximiere $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ mit $u_k \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$. □

Satz 10.8 (Der Fall $p = d$)**.** *Die Einbettung*

$$W^{1,d}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d), \qquad q \in [d, \infty)$$

ist stetig.

Proof. Ohne Beweis. □

Korollar 10.9. *Sei $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 1$) und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

(a) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} > 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$ *mit* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$

(b) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$ *für alle* $r \in [p, \infty)$ $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$

(c) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

(a) Sei $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$, $m - d/p \notin \mathbb{N}$. *Setze*

$$k := \left[m - \tfrac{d}{p}\right] \qquad \text{und} \quad \theta := m - \tfrac{d}{p} - k,\ 0 < \theta < 1$$

$\Longrightarrow$ *für jede* $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ *es existiert* C *mit*

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{W^{m,p}} \qquad \forall |\alpha| \leq k$$

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq C\|f\|_{W^{m,p}}|x-y|^\theta \qquad \text{fast alle } x, y \in \mathbb{R}^d,\ |\alpha| = k.$$

Insbesondere gilt

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^d)$$

mit stetiger Einbettung.

Proof. ÜA. □

11. Sobolev Räume III.

Notation 11.1. *Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Dann $x = (x', x_d)$ mit $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$. Wir setzen*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d_+ &:= \{x = (x', x_d) : \ x_d > 0\} \\ Q &:= \{x = (x', x_d) : \ |x'| < 1 \text{ und } |x_d| < 1\} \\ Q_+ &:= Q \cap \mathbb{R}^d_+ \\ Q_0 &:= \{x = (x', x_d) : \ |x'| < 1 \text{ und } x_d = 0\} \end{aligned}$$

Definition 11.2. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann heißt Ω* von der Klasse *C^1, falls für alle $x \in \partial\Omega$ es eine Umgebung $U(x)$ von x in $\mathbb{R}^d$ und eine bijektive Abbildung $\Phi : Q \to U(x)$ existiert, so dass Φ, Φ^{-1} stetig differenzierbar sind und $\Phi(Q_+) = U(x) \cap \Omega$, $\Phi(Q_0) = U(x) \cap \partial\Omega$ gelten.*

Satz 11.3 (Fortsetzungsoperator)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt und von der Klasse C^1. Dann existiert für $1 \le p \le \infty$ ein linearer Operator $F : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, so dass für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt*
- *(a) $Fu\big|_\Omega = u$,*
- *(b) $\|Fu\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C_\Omega \|u\|_{L^p(\Omega)}$,*
- *(c) $\|Fu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \le C_\Omega \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.*

Beweisidee: Betrachte für jedes $x \in \overline{\Omega}$ eine Umgebung $U(x)$ und einen zugehörigen Diffeomorphismus $\Phi_x : Q \to U(x)$ (nach unserer Voraussetzung). Dann kann man $\overline{\Omega}$ mit $U_0 := \Omega$ und endlich vielen U_l dieser Form überdecken ($l = 1, \dots, d$). Betrachte eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins (φ_l). Die Funktionen $\varphi_l f$ (eingeschränkt auf $\Omega \cap U_l$) liegen in $W^{1,p}(\Omega \cap U_l)$. Sei einfach

$$\tilde{f}_0(x) := \begin{cases} g_0(x) & x \in U_0 \\ 0 & x \notin U_0 \end{cases}.$$

Für $l > 0$ definiere $g_l := (\varphi_l f) \circ \Phi_l$. Dann gehört g_l zu $W^{1,p}(Q_+)$ nach Satz 9.9. Setze g_l, $l > 0$ auf Q so fort:

$$\tilde{g}_l((x', x_d)) := \begin{cases} g_l((x', x_d)) & (x', x_d) \in Q_+ \\ g_l((x', -x_d)) & (x', x_d) \notin Q_+ \cup Q_0. \end{cases}$$

Es gilt $\tilde{g}_l \in W^{1,p}(Q)$ und $\|\tilde{g}_l\|_{W^{1,p}(Q)} \le C\|g_l\|_{W^{1,p}(Q_+)}$ (dies ist noch zu beweisen!). Jetzt sei $\tilde{f}_l := \tilde{g}_l \circ \Phi_l^{-1}$. Dann gilt $\tilde{f}_l\big|_{\Omega \cap U_l} = (\varphi_l f)\big|_{\Omega \cap U_l}$ und $\tilde{f}_l$

ist null außerhalb von $\Phi_l^{-1}(Q)$. Betrachte jedes $\tilde{f}_l$ als eine Funktion definiert auf $\mathbb{R}^d$ (0 außerhalb U_l). Dann $\tilde{f}_l \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, also liegt die Funktion

$$\tilde{f} = \sum_{l=1}^{d} \tilde{f}_l$$

auch in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ und sie ist eine Fortsetzung von f (nach Konstruktion). Die folgenden Abschätzungen gelten für $l > 0$:

$$\begin{aligned} \|g_l\|_{W^{1,p}(Q_+)} &\leq C\|\varphi_l f\|_{W^{1,p}(\Omega\cap U_l)}, & \|g_l\|_{L^p(Q_+)} &\leq C\|\varphi_l f\|_{L^p(\Omega\cap U_l)} \\ \|\tilde{g}_l\|_{W^{1,p}(Q)} &\leq C\|g_l\|_{W^{1,p}(Q_+)}, & \|\tilde{g}_l\|_{L^p(Q)} &\leq C\|g_l\|_{L^p(Q_+)} \\ \|\tilde{f}_l\|_{W^{1,p}(U_l)} &\leq C\|\tilde{g}_l\|_{W^{1,p}(Q)}, & \|\tilde{f}_l\|_{L^p(U_l)} &\leq C\|\tilde{g}_l\|_{L^p(Q)}, \end{aligned}$$

wobei die Konstante C nur von Ω, von der Überdeckung und von den zugehörigen Funktionen Φ_l abhängt. Also

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} &\leq \sum_{l=0}^{d} \|\tilde{f}_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = \sum_{l=0}^{d} \|\tilde{f}_l\|_{W^{1,p}(U_l)} \leq C' \sum_{l=0}^{d} \|\varphi_l f\|_{W^{1,p}(U_l\cap\Omega)} \\ &\leq C''\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Analog geht der Beweis der L^p-Abschätzung (b). □

Satz 11.4 (Dichtheit). *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt und von der Klasse C^1. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ wobei $1 \leq p < \infty$. Dann existiert eine Folge $(u_n) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $u_n\big|_\Omega \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$, d.h. die Menge*

$$\left\{u\big|_\Omega :\ u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\right\}$$

ist ein dichter Unterraum von $W^{1,p}(\Omega)$.

Proof. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und betrachte Fu. Satz 10.1 liefert eine Folge $(v_n) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $v_n \to Fu$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Die Folge $u_n := v_n\big|_\Omega$ hat die gewünschten Eigenschaften. □

Korollar 11.5. *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt von der Klasse C^1, oder $\Omega = \mathbb{R}^d_+$. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

(a) $1 \leq p < d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$,
(b) $p = d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ für alle $r \in [p, \infty)$,
(c) $p > d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

(a) Sei $p > d$ und $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$. Es gibt eine Konstante $C := C_{\Omega,p,d}$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}|x - y|^\alpha \qquad \text{für alle } f \in W^{1,p}(\Omega).$$

Insbesondere ist die Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}) \quad \textit{stetig.}$$

Proof. ÜA. □

Korollar 11.6. *Sei $m \in \mathbb{N}$ $(m \geq 1)$ und $1 \leq p < \infty$. Dann gelten die folgende Aussagen*

(a) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} > 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ *mit* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$,
(b) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ *für alle* $r \in [d, \infty)$,
(c) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

(a) *Sei* $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$, $m - d/p \notin \mathbb{N}$. *Setze*

$$k := \left[m - \tfrac{d}{p}\right] \qquad \text{und} \quad \theta := m - \tfrac{d}{p} - k,\ 0 < \theta < 1$$

$\Longrightarrow$ *für jede* $f \in W^{m,p}(\Omega)$. *Dann existiert* C *mit*

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} \qquad \text{für alle } |\alpha| \leq k$$

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq C\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}|x-y|^\theta \quad \text{für fast alle } x, y \in \Omega,\ |\alpha| = k.$$

Insbesondere gilt

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$$

mit stetiger Einbettung.

Proof. Analog zu Korollar 11.5. □

Satz 11.7 (Charakterisierungen von Sobolev Funktionen). *Es sei $f \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p \leq \infty$. Äquivalent sind*

(a) $f \in W^{1,p}(\Omega)$
(b) *Es existiert* $C > 0$

$$\Big|\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big| \leq C\|\varphi\|_{L^q(\Omega)}, \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ i = 1, \ldots, d.$$

(c) *Es existiert ein* $C > 0$, *so dass für jedes* $\Omega' \subset \Omega$ *mit* $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ *und für alle* $h \in \mathbb{R}^d$ *mit* $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \Omega^c)$ *gilt*

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} \leq C|h|.$$

Bemerkung 11.8. *Es kann* $C = \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$ *gewählt werden.*

Falls $p = 1$, *so gilt (a)* $\Longrightarrow$ *(b)* $\Longleftrightarrow$ *(c)*

Proof. ÜA. □

Satz 11.9. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $1 \leq p < \infty$ und $M \subseteq L^p(\Omega)$ beschränkt. Es gelte*

(a) *für alle* $\varepsilon > 0$ *und* $\Omega' \subseteq \overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ *existiert ein* $0 < \delta < \operatorname{dist}(\Omega', \Omega^c)$ *mit*

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R}^d \text{ mit } |h| < \delta \text{ und für alle } f \in M,$$

wobei $(\tau_h f)(x) = f(x + h)$.

(b) *für alle* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $\Omega' \subseteq \Omega$ *mit* $\overline{\Omega'}$ *kompakt in* Ω, *so dass*

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega')} < \varepsilon \quad \text{für alle } f \in M.$$

Dann ist M relativ kompakt in $L^p(\Omega)$.

Proof. (Skizze). Wir betrachten zunächst den Fall $\Omega = \mathbb{R}^d$. Nach Voraussetzung (b) können wir $\Omega' \subset \Omega$ mit $\overline{\Omega'}$ kompakt in Ω wählen, so dass ein $C > 0$ mit

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\Omega')} \leq C\varepsilon, \quad f \in M. \tag{10}$$

existiert. Sei η_n ein Mollifier und $\Phi \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\|\eta_n * \Phi - \Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{h\in B(0,\varepsilon)} \|\tau_h\Phi - \Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{11}$$

Da $C_c(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$ ist, existiert für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ eine Folge $(\Phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\lim_{j\to\infty} \Phi_j = f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n * \Phi_j = \eta_n * f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d),$$
$$\lim_{j\to\infty} \tau_h\Phi_j = \tau_h f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d).$$

Damit folgt aus (11) und (a), dass

$$\lim_{n\to\infty} \|\eta_n * f - f\|_{L^p(\Omega')} = 0$$

gleichmäßig für alle $f \in M$, d.h. es existiert ein $C > 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\eta_n * f - f\|_{L^p(\Omega')} < C\varepsilon, \quad f \in M. \tag{12}$$

Wegen $\eta_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt insbesondere $\eta_n * f \in C(\overline{\Omega'})$. Mit Arzela-Ascoli folgt nun, dass

$$M' = \{\eta_n * f : f \in M\}$$

relativ kompakt ist.
Somit existieren nach (Adams, Sobolev Spaces) Theorem 1.19 eine endliche Menge von Funktionen $\{\psi_1, \dots, \psi_m\} \subset C(\overline{\Omega'})$ mit

$$M' \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(\psi_i, \varepsilon).$$

Daher existiert ein $C > 0$, so dass für $f \in M$ ein $j \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$|\psi_j(x) - (\eta_n * f)(x)| < C\varepsilon, \quad x \in \overline{\Omega'} \tag{13}$$

existiert. Bezeichne die Erweiterung mit 0 auf $\mathbb{R}^d$ von ψ mit $\tilde{\psi}$. Dann folgt aus (10), (11), (12) und (13), dass

$$\|f - \tilde{\psi}_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$$

für ein $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt, d.h.

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(\tilde{\psi}_i, \varepsilon).$$

Daher ist M relativ kompakt.

Der allgemeine Fall folgt aus dem Spezialfall, wenn man die Menge $\tilde{M} = \{\tilde{f} : f \in M\}$, wobei $\tilde{f}$ die Erweiterung mit 0 auf $\mathbb{R}^d$ von f bezeichnet, betrachtet. (s. Adams, Sobolev Spaces, Theorem 2.32) □

Theorem 11.10 (Rellich). *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt der Klasse C^1. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

(a) $p < d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, $r \in [1, p^*)$, wobei $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$ erfüllt ist;
(b) $p = d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, $r \in [1, \infty)$;
(c) $p > d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$

jeweils mit kompakter Einbettung.

Proof. (a) Sei B die Einheitskugel in $W^{1,p}(\Omega)$. Wir verwenden Satz 11.9. Sei $1 \leq r < p^*$. Dann existiert ein $\theta \in (0,1]$ mit $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{p^*}$. Sei $\Omega' \subseteq \overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ und $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \Omega^c)$. Die Interpolationsungleichung 7.11 und 11.7 liefern

$$\begin{aligned}
\|\tau_h u - u\|_{L^r(\Omega')} &\leq \|\tau_h u - u\|_{L^1(\Omega')}^{\alpha} \|\tau_h u - u\|_{L^{p^*}(\Omega')}^{1-\alpha} \\
&\leq |h|^{\alpha} \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}^{\alpha} (2\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)})^{1-\alpha} \\
&\leq C|h|^{\alpha} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{1-\alpha} \leq C|h|^{\alpha},
\end{aligned}$$

falls $u \in B$. Ferner gilt für solche u

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^r(\Omega \setminus \Omega')} &= \Big(\int\limits_{\Omega \setminus \Omega'} |u(x)|^r \,\mathrm{d}x \Big)^{1/r} \leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega \setminus \Omega')} |\Omega \setminus \Omega'|^{1-r/p^*} \\
&\leq |\Omega \setminus \Omega'|^{1-r/p^*} \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

falls Ω' geeignet gewählt ist.
(b) Analog.
(c) Sei $p > d$. Sei B die Einheitskugel in $W^{1,p}(\Omega)$. Es ist zu zeigen, dass B relativ kompakt in $C(\overline{\Omega})$ ist. Korollar 11.5 liefert

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} \qquad \forall f \in B,$$

mit $\alpha > 0$, d.h. B ist gleichmäßig gleichgradig stetig. Der Satz von Arzelà–Ascoli 3.9 liefert die Behauptung.

□

Definition 11.11. *Definiere $W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_c^{\infty}(\Omega)}$, wobei der Abschluss in $W^{m,p}(\Omega)$ zu verstehen ist.*

Satz 11.12. *(a) Sei $1 \leq p < \infty$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit* $\operatorname{supp} u$ *kompakt und* $\operatorname{supp} u \subseteq \Omega$. *Dann $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*
(b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und von der Klasse C^1. Es sei $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $1 \leq p < \infty$. (Erinnerung: falls $p > d$, dann $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$). Dann ist $u = 0$ auf $\partial\Omega$ genau dann, wenn $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proof. Ohne Beweis. □

Satz 11.13 (Poincaré Ungleichung)**.** *Sei $\emptyset \neq \Omega$ offen und beschränkt. Dann existiert $C_\Omega > 0$ mit*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{für alle } f \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Proof. Sei $f \in C_c^\infty(\Omega)$ und $\Omega \subseteq [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, und definiere $f = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Dann gilt für $i = 1, \ldots, d$

$$\begin{aligned}
|f(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_d)|^p &= |f(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_d) - f(x_1, \ldots, a_i, \ldots x_d)|^p \\
&= \Big| \int_{a_i}^{x_i} D_i f(x_1, \ldots, y_i, \ldots x_d) \Big|^p \, \mathrm{d}y_i \\
&\leq (b_i - a_i)^{p/q} \int_{a_i}^{x_i} |D_i f|^p \leq (b_i - a_i)^{p/q} \int_{a_i}^{b_i} |D_i f|^p.
\end{aligned}$$

Daher

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p \leq (b_i - a_i)^{p/q} (b_i - a_i) \|D_i f\|_{L^p(\Omega)}^p = (b_i - a_i)^p \|D_i f\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Da $(\sum_{i=1}^d |D_i f|^p)^{1/p} \leq M |\nabla f|$, so erhalten wir die gewünschte Ungleichung. □

Satz 11.14 (Einbettungssätze für $W_0^{1,p}(\Omega)$)**.** *Die obigen Einbettungssätze gelten auch für $W_0^{1,p}$-Räume.*

Proof. Klar, da $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$. □

Bemerkung 11.15 (Vektorwertige Sobolev-Räume)**.** *Sei $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Wir definieren*

$$W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{f = (f_1, \ldots, f_m) : f_i \in W^{k,p}(\Omega), \; i = 1, \ldots, m\}.$$

Dann gelten die Sätze für $W^{k,p}(\Omega)$ auch für vektorwertige Sobolev-Räume.

Proof. Sätze komponentenweise anwenden. □

12. Hilberträume

Definition 12.1. *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt* Skalarprodukt*, falls*

(a) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ *für* $x_1, x_2, y \in X$
(b) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ *für* $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$
(c) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *für* $x, y \in X$
(d) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *und* $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ *(für $x \in X$)*

Definition 12.2.

(a) Ein normierter Vektorraum heißt Prähilbertraum*, wenn ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $X \times X$ existiert mit $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.*
(b) Ein vollständiger Prähilbertraum heißt Hilbertraum*.*

Bemerkung 12.3. *Sei H ein Prähilbertraum. Es gilt*

(a) Cauchy–Schwarz-Ungleichung*:* $|\langle x,y\rangle| \le |\langle x,x\rangle|^{1/2}\cdot|\langle y,y\rangle|^{1/2}$ *für alle* $x,y\in H$.
(b) Die Abbildung $x\mapsto \langle x,x\rangle^{1/2} =: \|x\|$ *ist eine Norm.*

Lemma 12.4 (Parallelogrammgleichung)**.** *Ein normierter Vektorraum ist ein Prähilbertraum genau dann, wenn für alle* $x,y\in H$ $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$ *gilt.*

Proof. Ohne Beweis. □

Beispiel 12.5. *Beispiele von Hilberträumen*

(a) $\mathbb{C}^d$ *mit Skalarprodukt* $\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{d} x_i\overline{y_i}$.
(b) ℓ^2 *mit Skalarprodukt* $\langle (x_n),(y_n)\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$.
(c) $L^2(M,\mu)$ *mit Skalarprodukt* $\langle f,g\rangle := \int_M f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$.
(d) $W^{m,2}(M,\mu)$ *mit Skalarprodukt* $\langle f,g\rangle := \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega D^\alpha f\overline{D^\alpha g}$.

Definition 12.6 (Orthogonalität)**.** *Sei H ein Prähilbertraum,*

(a) Die Vektoren $x,y\in H$ heißen orthogonal *($x\perp y$), falls $\langle x,y\rangle = 0$.*
(b) Die Mengen $A,B\subseteq H$ heißen orthogonal *($A\perp B$), falls $a\perp b$ $\forall a\in A,\ b\in B$.*
(c) Sei $M\subseteq H$. Das orthogonale Komplement *von M ist definiert durch*

$$M^\perp := \{x\in H:\ x\perp M\}.$$

Bemerkung 12.7. *(a)* $x\perp y \Longrightarrow \|x\|^2+\|y\|^2 = \|x+y\|^2$ *(Pythagoras).*
(b) $M^\perp$ *ist ein abgeschlossener Unterraum von* H.
(c) $N,M\subseteq H$, $N\subseteq M \Longrightarrow M^\perp\subseteq N^\perp$
(d) $M\subseteq M^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{lin}}(M)$

Proof. ÜA. □

Satz 12.8 (Projektionssatz)**.** *Sei H ein Hilbertraum, $K\subseteq H$ eine abgeschlossene, konvexe Menge und $x_0\in H$. Dann existiert ein eindeutiges $x\in K$ mit $\|x-x_0\| = \inf_{y\in K}\|y-x_0\|$.*

Proof. OBDA nehmen wir $x_0 = 0$ und $0\notin K$ an.

Existenz: Sei $\delta := \inf_{y\in K}\|y\|$. Dann findet man eine Folge $(y_n)\subseteq K$ mit $\|y_n\|\to\delta$. Nach der Parallelogrammgleichung

$$\delta^2 \le \left\|\tfrac{y_n+y_m}{2}\right\| \le \left\|\tfrac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 + \left\|\tfrac{y_n-y_m}{2}\right\|^2 = \tfrac12\|y_n\|^2+\tfrac12\|y_m\|^2 \to \delta^2,$$

d.h. (y_n) ist eine Cauchyfolge. Dann gilt $y_n\to y\in K$ und $\|y\| = \delta$.

Eindeutigkeit: Seien $x_1, x_2 \in K$ mit obiger Eigenschaft.

$$\delta^2 \le \left\|\tfrac{x_1+x_2}{2}\right\|^2 \le \left\|\tfrac{x_1+x_2}{2}\right\|^2 + \left\|\tfrac{x_1-x_2}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|x_1\|^2 + \frac{1}{2}\|x_2\|^2 \le \delta^2,$$

d.h $\left\|\tfrac{x_1-x_2}{2}\right\|^2 = 0$ und $x_1 = x_2$. □

Lemma 12.9. *Sei H ein Hilbertraum, Y abgeschlossener Unterraum, $x_0 \in H$ und $x \in H$ mit $\|x - x_0\| = \inf_{y\in Y} \|y - x_0\|$. Dann ist $x - x_0 \perp Y$.*

Proof. Angenommen die Behauptung ist falsch. Dann existiert ein $y \in Y$ mit $\langle x - x_0, y\rangle = \beta \neq 0$. Sei $z := x_0 - x$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\overline{\beta} - \overline{\lambda}\langle y, y\rangle = 0$. Es gilt

$$\|z - \lambda y\|^2 = \langle z - \lambda y, z - \lambda y\rangle = \|z\|^2 - \overline{\lambda}\beta - \lambda(\overline{\beta} - \overline{\lambda}\langle y, y\rangle) = \|z\|^2 - \overline{\lambda}\beta,$$

Dann ist $\|z - \lambda y\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\|y\|^2} < \|z\|^2 = \delta^2$. Dies liefert aber ein Widerspruch, denn $z - \lambda y = x_0 - x - \lambda y$ und $x + \lambda y \in Y$. □

Satz 12.10. *Sei Y ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums H. Dann*

$$H = Y \oplus Y^\perp.$$

Proof. $Y \cap Y^\perp = \{0\}$ ist klar. Der Raum Y ist abgeschlossen und natürlich konvex, also existiert nach dem Projektionssatz für alle $x \in H$ ein $y \in Y$ mit $x = y + z$ und $z \in Y^\perp$ (vgl. Lemma 12.9). □

Bemerkung 12.11. *Die Darstellung $x = y + z$ definiert eine Abbildung $P : H \to Y$, $x \mapsto y = Px$. Der Operator P ist linear und heißt die* Orthogonalprojektion *von H auf Y. P ist beschränkt und* idempotent, *d.h. $P^2 = P$.*

Theorem 12.12 (Rieszscher Darstellungsatz)**.** *Es sei H ein Hilbertraum. Dann existiert zu $\varphi \in H'$ genau ein $z \in H$ mit*

$$\varphi(x) = \langle x, z\rangle \qquad \forall x \in H.$$

Weiter gilt $\|\varphi\| = \|z\|$.

Proof. Existenz: Für $\varphi = 0$ wähle $z = 0$. Sei also $\varphi \neq 0$. Der Raum $\ker\varphi$ ist in H abgeschlossen, und es gilt $\ker\varphi \neq H$, also enthält $(\ker\varphi)^\perp$ ein $z_0 \neq 0$. Für $x \in H$ setze $y := \varphi(x)z_0 - \varphi(z_0)x$. Dann $\varphi(y) = \varphi(x)\varphi(z_0) - \varphi(z_0)\varphi(x) = 0$, d.h. $y \in \ker\varphi$. Daraus folgt

$$0 = \langle y, z_0\rangle = \langle \varphi(x)z_0 - \varphi(z_0)x, z_0\rangle = \varphi(x)\langle z_0, z_0\rangle - \varphi(z_0)\langle x, z_0\rangle$$
$$\implies \quad \varphi(x) = \frac{\varphi(z_0)}{\langle z_0, z_0\rangle}\langle x, z_0\rangle,$$

und $z := \overline{\frac{\varphi(z_0)}{\langle z_0, z_0\rangle}} z_0$ ist der gewünschte Vektor.

Eindeutigkeit: Seien $z_1, z_2 \in H, \varphi(x) = \langle x, z_1\rangle = \langle x, z_2\rangle$ für alle $x \in H$. Dann $z_1 - z_2 \in H^\perp = \{0\}$.

Die Norm: Der Fall $\varphi = 0$ ist klar. Da $\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = \varphi(z) \leq \|\varphi\|\|z\|$ gilt, so erhalten wir $\|z\| \leq \|\varphi\|$. Umgekehrt: $|\varphi(x)| = |\langle x, z\rangle| \leq \|x\|\|z\| \Longrightarrow \|\varphi\| \leq \|z\|$. □

Bemerkung 12.13. *Theorem 12.12 kann auch so formuliert werden: die Abbildung* $\Phi : H \to H'$, $\Phi(x) := \langle \cdot, x\rangle$ *ist bijektiv, isometrisch und* konjugiert linear, *d.h.* $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ *und* $\Phi(\alpha x) = \overline{\alpha}\Phi(x)$ *für alle* $x, y \in H$ *und* $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definition 12.14. *Sei* $a : H \times H \to \mathbb{K}$ *eine* Sesquilinearform, *d.h. es gilt:*

- $a(x + y, z) = a(x, z) + a(y, z)$
- $a(x, y + z) = a(x, y) + a(x, z)$
- $a(\alpha x, y) = \alpha a(x, y)$
- $a(x, \alpha y) = \overline{\alpha} a(x, y)$

Dann heißt a

(a) stetig, *falls* $\exists M > 0$ *mit* $|a(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$ *für alle* $x, y \in H$.
(b) koerziv, *falls* $\exists \alpha > 0$ *mit* $\mathrm{Re}\, a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2$ *für alle* $x \in H$.

13. Elliptische Randwertprobleme

Notation 13.1. *Die Sobolevräume werden im Falle* $p = 2$ *mit* $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ *bzw. mit* $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$ *bezeichnet.*

Bemerkung 13.2. *Die Räume* H^m *und* H_0^m *sind Hilberträume mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g\rangle := \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D_\alpha f \overline{D_\alpha g}.$$

Insbesondere sind sie reflexiv. Die Norm ist hier gegeben durch das Skalarprodukt

$$\|f\| := \langle f, f\rangle^{1/2} := \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \big|D_\alpha f\big|\Big)^{1/2},$$

welches zu der $W^{m,2}$*-Norm äquivalent ist.*

Im Folgenden nehmen wir stillschweigend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ an, aber natürlich gelten die Resultate auch im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Lemma 13.3. *Sei* $(u_n) \subseteq H^1(\Omega)$ *schwach konvergent gegen ein* u*. Dann konvergiert* u_n *in* $L^2(\Omega)$ *gegen* u.

Proof. Die Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ist kompakt (siehe Theorem 11.10). Nehmen wir an, dass eine Teilfolge u_{n_k} existiert mit $\|u_{n_k} - u\|_{L^2(\Omega)} \geq \varepsilon$ für ein festes $\varepsilon > 0$ und für alle n_k, diese Teilfolge wird auch mit u_n bezeichnet. Da (u_n) beschränkt in $H^1(\Omega)$ ist, hat es eine $L^2(\Omega)$-konvergente Teilfolge $u_{n_k} \to u'$. Aber $u_{n_k} \to u$ schwach in $H^1(\Omega)$ also auch schwach in $L^2(\Omega)$, was zu dem Widerspruch $u' = u$ führt. □

Bemerkung 13.4. *Natürlich gilt das obige Resultat für* $W^{1,p}$ *Räume so lange* $1 < p < \infty$ *ist.*

Satz 13.5. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt, Lipschitz-stetig und $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, offen. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ der Gleichung*

$$-\Delta u = f(u),$$

d.h.

$$\langle \nabla \varphi, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \varphi, f(u) \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Proof. Wir verwenden den Fixpunktsatz von Schauder 3.14 mit $X = L^2(\Omega)$ und

$$K := \{u \in H_0^1(\Omega) : \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq M_0\},$$

wobei M_0 eine später zu bestimmende Konstante ist. Wir definieren $F : K \to K$ durch $F(v) := u$, wobei u die schwache Lösung von $-\Delta u = f(v)$ ist. Nach ÜA. existiert für $v \in H_0^1(\Omega)$ ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$a(\varphi, u) := \langle \nabla \varphi, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \varphi, f(v) \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Außerdem ist F stetig, da nach Voraussetzung ein $L > 0$ mit

$$\|f(v_1) - f(v_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq L \|v_1 - v_2\|_{L^2(\Omega)}, \quad v_1, v_2 \in L^2(\Omega)$$

existiert.
Mit der Hölder und der Poincaré Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = a(u,u) = \int_\Omega f(v) u \, \mathrm{d}x &\leq \|f\|_\infty \|u\|_{L^2(\Omega)} |\Omega|^{1/2} \\ &\leq \|f\|_\infty C_\Omega^{1/2} |\Omega|^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $F : K \to K$, falls $M_0 := \|f\|_\infty C_\Omega^{1/2} |\Omega|^{1/2}$.
Es bleibt zu zeigen, dass K nicht leer, konvex und kompakt ist. Dass $0 \in K$ gilt, und die Konvexität erfüllt ist, ist trivial. Wir zeigen, dass jede Folge $(u_n) \subseteq K$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Da (u_n) beschränkt in $H_0^1(\Omega)$ ist, besitzt sie eine schwach konvergente Teilfolge (u_{n_k}), $u_{n_k} \xrightarrow{\sigma} u$ (siehe Satz 6.12). Nach Lemma 13.3 erhalten wir $u_{n_k} \to u$ in $L^2(\Omega)$. Es bleibt $u \in K$ zu zeigen. Die schwache Konvergenz liefert $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{n_k} \|u_{n_k}\|_{H_0^1(\Omega)}$. Da $\|u_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \to \|u\|_{L^2(\Omega)}$, folgt auch $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq M_0$.
Verwendung des Fixpunktsatzes von Schauder liefert $u \in K$, mit $F(u) = u$, d.h. $-\Delta u = f(u)$ im schwachen Sinne. □

13.1. **Elliptische Gleichungen 2. Ordnung mit Dirichlet Randbedingungen.** Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Seien $a_{ji} = a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i,j \leq n$ und $a_0 \in C(\Omega)$, $a_0(x) \geq 0$ für jedes $x \in \Omega$. Wir setzen im Folgenden die sogenannte *Elliptizitätsbedingung* voraus:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > \alpha |\xi|^2, \qquad \forall x \in \Omega, \, \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

für ein $\alpha > 0$.

Problem 13.6 (Dirichlet-Randbedingung)**.** *Finde* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\big) + a_0 u &= f \quad \textit{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \textit{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Klassische Lösung: Eine Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$, welche (P) erfüllt.

Schwache Lösung: Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\text{(SP)} \qquad +\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega a_0 uv = \int_\Omega fv, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

13.2. **Klassische Lösungen sind auch schwache Lösungen.**

Proof. Falls $u \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt auch $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Da $u\big|_{\partial\Omega} = 0$, liegt u in $H_0^1(\Omega)$ (siehe Satz 11.12). Multiplikation mit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ und partielle Integration liefern (SP) für $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Der Dichtesatz 9.7 gibt (P) für alle $v \in H_0^1(\Omega)$. □

13.3. **Existenz von schwachen Lösungen.** Seien nun $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Dann existiert eine eindeutige Lösung u des schwachen Problems (SP), mit

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer von f unabhängigen Konstanten C.

Proof. Setze

$$a(u,v) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega a_0 uv,$$
$$b(v) := \int_\Omega fv, \qquad v \in H_0^1(\Omega).$$

Dann ist a eine stetige Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$, denn

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\le C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + C\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C'\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Genauso sieht man, dass das lineare Funktional b stetig ist. Die Bilinearform a ist auch koerziv, denn

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u^2\Big) \overset{\text{ellipt.}}{\geq} \int_\Omega \alpha|\nabla u|^2 + a_0 \int_\Omega |u|^2 \\
&\geq \alpha\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \alpha\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \varepsilon\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + (\alpha-\varepsilon)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\overset{\text{Poincaré}}{\geq} \varepsilon\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \tfrac{(\alpha-\varepsilon)}{C_\Omega^2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \varepsilon\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \Big(\tfrac{\alpha}{C_\Omega^2} - \varepsilon\Big(1+\tfrac{1}{C_\Omega^2}\Big)\Big)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Für genügend kleines $\varepsilon > 0$ folgt die Koerzivität von a. Verwendung vom Lax–Milgram Lemma liefert die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung (vgl. ÜA).

Die schwache Lösung u erfüllt

$$\|u\|^2_{H_0^1} \leq \frac{1}{\varepsilon}a(u,u) = \frac{1}{\varepsilon}b(u) = \int_\Omega fu \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dies zeigt $\|u\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\varepsilon}\|f\|_{L^2(\Omega)}$, also die gewünschte Normabschätzung. □

13.4. **Regularität der Lösung.** Seien $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ für alle $x \in \Omega$ und Ω offen, beschränkt, von der Klasse C^2. Sei $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von (P). Dann

(a) $u \in H^2(\Omega)$ und $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$.
(b) Ist $f \in H^m(\Omega)$ und $\partial\Omega$ der Klasse $C^{m+2} \implies u \in H^{m+2}(\Omega)$ und $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)}$.

Proof. Siehe Kapitel 13. □

Korollar 13.7. *Sei $f \in H^m(\Omega)$ und $u \in H^{m+2}(\Omega)$ die schwache Lösung von* (P). *Die Sobolevsche Einbettungsätze 10.9 geben $W^{l,p}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\Omega)$, falls $l > 2 + d/p$. Für $p = 2$ und $m > d/2$ gilt $u \in H^{m+2}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$.*

13.5. **Rückkehr zur klassischen Lösung.** Sei $f \in H^m(\Omega)$ mit $m > d/2$. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$. Nach Satz 11.12 $u\big|_{\partial\Omega} = 0$. Ferner partielle Integration und Dichtheitargument liefern die Existenz klassischer Lösungen.

Satz 13.8 (Allgemeine Poincaré Ungleichung)**.** *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und zusammenhängend mit C^1-Rand. Sei $\emptyset \neq M \subseteq W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ konvex und abgeschlossen, $1 < p < \infty$. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent*

(a) Es gibt ein $u_0 \in M$ und $C > 0$, so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$u_0 + \xi \in M \qquad \implies \qquad |\xi| \leq C.$$

(b) Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + 1) \qquad \forall u \in M.$$

Proof. (b) $\Rightarrow$ (a): Sei $u_0 \in M$ beliebig und $\xi \in \mathbb{R}^d$ mit $u := u_0 + \xi \in M$. Dann ist $\nabla u = \nabla u_0$, also nach der Ungleichung in (b)

$$|\xi|\|\mathbf{1}\|_{L^p(\Omega)} - \|u_0\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_0 + \xi\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\|\nabla u_0\|_{L^p(\Omega)} + 1),$$

d.h. $|\xi| \leq \big(C(\|\nabla u_0\|_{L^p(\Omega)} + 1) + \|u_0\|_{L^p(\Omega)}\big) / \|\mathbf{1}\|_{L^p(\Omega)}$.

(a) $\Rightarrow$ (b): Betrachte $M' := M - u_0$. Für $u \in M$ gilt dann $u = v - u_0$ mit $v \in M'$, also

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|v\|_{L^p(\Omega)} + \|u_0\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\|\nabla v\| + 1) + \|u_0\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u_0\|_{L^p(\Omega)} + 1) + \|u_0\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Dies zeigt dass wir o.B.d.A. $u_0 = 0$ annehmen können.
Wäre (b) falsch, würde $u_k \in M$ existieren mit

$$\|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)} + 1 \leq \tfrac{1}{k}\|u_k\|_{L^p(\Omega)}.$$

Setze $a_k := R/\|u_k\|_{L^p(\Omega)}$, wobei R später noch bestimmt wird. Dann gilt: $a_k \to 0$. Insbesondere gilt $a_k \in (0,1)$ für große k, also wegen $0 \in M$ gilt auch $v_k := a_k u_k \in M$, und so $\|v_k\| = R$. Dann gilt

$$\|\nabla v_k\|_{L^p(\Omega)} + a_k \leq \tfrac{1}{k}\|v_k\|_{L^p(\Omega)} = \tfrac{R}{k} \to 0.$$

Da (v_k) in $W^{1,p}(\Omega)$ beschränkt ist, besitzt es eine schwach konvergente Teilfolge, die auch mit (v_k) bezeichnet wird, $v_k \xrightarrow{\sigma} v \in M$ (vgl. Korollar 6.17). Nach der obigen Ungleichung konvergiert ∇v_k gegen 0 in $L^p(\Omega)$, also $\nabla v = 0$. Da Ω zusammenhängend ist, stimmt v fast überall mit einer konstanten Funktion überein, d.h. $v = \xi \in \mathbb{R}$ fast überall (s. Alt, Ü 6.9). Nach Voraussetzung $|\xi| \leq C$. Es gilt auch $v_k \to v$ in $L^p(\Omega)$ (siehe Lemma 13.3). Dann gilt

$$R = \|v_k\|_{L^p(\Omega)} \to \|v\|_{L^p(\Omega)} = |\xi|\|\mathbf{1}\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\mathbf{1}\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dies ist ein Widerspruch, falls R groß genug gewählt wird. $\square$

Satz 13.9 (Elliptisches Minimumproblem)**.** *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und zusammenhängend mit C^1-Rand. Es sei ferner*

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \int_\Omega fu$$

Sei $\emptyset \neq M \subseteq H^1(\Omega)$ konvex und abgeschlossen. Ferner seien die äquivalenten Aussagen von Satz 13.8 erfüllt. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) E besitzt auf M ein absolutes Minimum u_0.

(b) *Die absoluten Minima u von E sind genau die Lösungen der* Variationsungleichung

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \frac{\partial(u-v)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \int_\Omega f(u-v) \leq 0 \qquad \forall v \in M.$$

(c) *Es gibt genau ein absolutes Minimum, falls M die folgende Eigenschaft hat:*

$$v \in M,\ \xi \in \mathbb{R}, v+\xi \in M \qquad \Longrightarrow \qquad \xi = 0.$$

Proof. (a) Beh. $\{E(u) : u \in M\}$ ist von unten beschränkt.

Für $\delta > 0$ gilt

$$\begin{aligned} E(u) &\geq \tfrac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\overset{\text{Young}}{\geq} \tfrac{\alpha}{2} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \delta \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \tfrac{1}{4\delta} \|f\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die Poincaré–Ungleichung 13.8 liefert $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + 1)$, also

$$E(u) \geq (\tfrac{\alpha}{2} - \delta C) \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C_{\delta,f}, \tag{14}$$

wähle $\delta > 0$ klein so, dass $\frac{\alpha}{2} - \delta C > 0$. Das heißt $E(u) \geq c_1 \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - c_2$, also ist $E(u)$ von unten beschränkt.
Beh. Es existiert ein $u \in M$ mit $E(u) = \inf_{v \in M} E(v)$.

Sei $u_n \in M$ mit $E(u_n) \to d := \inf_{u \in M} E(u)$. Aus (14) folgt, dass $\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$ beschränkt, und somit nach der Poincaré–Ungleichung (u_n) in $H^1(\Omega)$ beschränkt ist. Nach Satz 6.12 hat (u_n) eine schwach konvergente Teilfolge $u_{n_k} \to u$. Da M konvex und abgeschlossen ist liegt u in M, siehe Korollar 6.17. Betrachte $F(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann ist F konvex, da $D^2 F$ positiv definit ist (vgl. elliptisch). Daher gilt die Abschätzung

$$F(y) \geq F(x) + (DF)(x)(y-x).$$

Setze $A = (a_{ij})$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \langle A\nabla u, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)} \leq &\langle A\nabla u_k, \nabla u_k \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u, A\nabla(u-u_k) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &+ \langle \nabla(u-u_k), A\nabla u \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Da $\langle \nabla u, A\nabla(\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)}$ und $\langle \nabla(\cdot), A\nabla u \rangle_{L^2(\Omega)}$ Funktionale auf $H_0^1(\Omega)$ sind, existiert für $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\langle A\nabla u, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)} \leq \langle A\nabla u_k, \nabla u_k \rangle_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \ \forall k > k_0,$$

d.h. $u \mapsto \langle A\nabla u, \nabla u\rangle_{L^2(\Omega)}$ ist schwach unterhalbstetig. Wegen Lemma 13.3 ist

$$u \mapsto \int_\Omega fu$$

stetig auf $H_0^1(\Omega)$, d.h. insbesondere schwach unterhalb stetig. Also ist auch $u \mapsto E(u)$ schwach unterhalbstetig. Somit gilt

$$E(u) \le \liminf_{k\to\infty} E(u_{n_k}) = \inf_{v\in M} E(v) \quad \Longrightarrow \quad E(u) = \inf_{v\in M} E(v).$$

(b) Sei u ein absolutes Minimum von E und $v \in M$. Da M konvex ist, liegt $(1-\alpha)u + \alpha v$ in M, und

(15)

$$E(u) \le E((1-\alpha)u + \alpha v) = E(u) - \alpha \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \tfrac{\partial (u-v)}{\partial x_j} - (u-v)f \Big)$$
$$+ \tfrac{\alpha^2}{2} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \tfrac{\partial (v-u)}{\partial x_i} \tfrac{\partial (v-u)}{\partial x_j}.$$

Nun zeigt $\alpha \to 0$ die Variationsungleichung.
Sei umgekehrt $u \in M$ eine Lösung der Variationsungleichung. Nimm $\alpha := 1$ in (15). Dann

$$\begin{aligned} E(v) =& E(u) - \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \tfrac{\partial (u-v)}{\partial x_j} - (u-v)f \Big) \\ &+ \tfrac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \tfrac{\partial (v-u)}{\partial x_i} \tfrac{\partial (v-u)}{\partial x_j} \\ \ge& E(u). \end{aligned}$$

(c) Es seien u_1, u_2 zwei Lösungen der Variationsungleichung. Addition der zwei Ungleichungen für u_1 bzw. u_2 ergibt

$$0 \ge \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial (u_1-u_2)}{\partial x_i} \frac{\partial (u_1-u_2)}{\partial x_j} \ge \alpha \|\nabla(u_1-u_2)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Dann $u_1 - u_2 = \xi$ fast überall, und nach Voraussetzung $\xi = 0$. □

Korollar 13.10 (Lösung des Dirichlet-Problems)**.** *Wähle $M := H_0^1(\Omega)$. Dann ist u, die Lösung der Variationsungleichung, die (schwache) Lösung von* (SP)

Proof. M ist ein abgeschlossener Unterraum von $H_0^1(\Omega)$, d.h. M ist konvex. Für $u \in M$ gilt $\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. Ist $v \in M$ konstant, dann gilt $\nabla v = 0$, also $v = 0$. Dies zeigt, dass die obigen Bedingungen 13.8 a) und 13.9

(c) erfüllt sind. Also hat die Variationsungleichung eine eindeutige Lösung u. Setze $v = u \pm \varphi$ in der Variationsungleichung. Dann folgt

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \mp a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \pm \int_\Omega \varphi f \leq 0,$$

d.h.

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \int_\Omega f\varphi, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

□

14. L^2-Regularitätstheorie

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Seien $a_{ji} = a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq d$ und $a_0 \in C(\Omega)$. Wir setzen die Elliptizitätsbedingung voraus. Wir untersuchen zunächst die Regularität von Lösungen der folgenden Gleichung für $f \in L^2(\Omega)$.

$$- \sum_{i,j=1}^d \partial_j \big(a_{ij} \partial_i u\big) + a_0 u = f \text{in } \Omega. \tag{16}$$

Theorem 14.1 (Innere Regularität). *Sei $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von* (16). *Dann ist $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ und für $V \subset \Omega$ mit $\overline{V} \subset \Omega$ gilt:*

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

wobei C nur von Ω, V und a_{ij} und a_0 abhängt.

Proof. Zu $V \subset \Omega$ wähle $W_1 \subset \Omega$ und $W_2 \subset \Omega$ offen mit

$$\overline{V} \subset W_1 \subset \overline{W_1} \subset W_2 \subset \overline{W_2} \subset \Omega$$

und $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\xi = 1$ auf V, $\xi = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus W_1$ und $0 \leq \xi \leq 1$. Betrachte

$$\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega a_{ij} \partial_i \varphi \partial_j u = \int_\Omega \varphi f - \int_\Omega a_0 \varphi u, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{17}$$

Setze $\varphi = -D_k^{-h}(\xi^2 D_k^h u)$, wobei

$$D_k^h u(x) = \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h}, \quad h \neq 0.$$

Dann gilt (ÜA)

$$\frac{\alpha}{2} \|\xi D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C\|\nabla u\|^2_{L^2(W_1)} \leq \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega a_{ij} \partial_i \varphi \partial_j u.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C\|\nabla(\xi^2 D_k^h u)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\|2\xi\nabla\xi D_k^h u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\xi^2\nabla D_k^h u\|^2_{L^2(\Omega)}) \\
&\leq C\left(\|D_k^h u\|^2_{L^2(W_1)} + \|\xi^2 D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(W_1)}\right) \\
&\leq C\left(\|\nabla u\|_{L^2(W_1)} + \|\xi^2 D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(W_1)}\right)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
|\int_\Omega \varphi f - \int_\Omega a_0\varphi u| &\leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(W_1)})\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(W_1)})\|\nabla u\|_{L^2(W_1)} \\
&\quad + C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(W_1)})\|\xi^2 D_k^h\nabla u\|^2_{L^2(W_1)} \\
&\leq C(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1(W_1)} + \frac{\alpha}{4}\|\xi^2 D_k^h \nabla u\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Also,

$$\frac{\alpha}{4}\|D_k^h\nabla u\|^2_{L^2(V)} \leq \frac{\alpha}{4}\|\xi D_k^h\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1(W_1)})$$

für h klein genug, d.h. $\nabla u \in H^1(V)$ und

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(W_1)}).$$

Wähle $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\eta = 1$ auf W_1, $\eta = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus W_2$ und $0 \leq \eta \leq 1$. Mit $\varphi = \eta^2 u$ in (17) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega a_{ij}\partial_i\varphi\partial_j u &= \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega a_{ij}\eta^2\partial_i u\partial_j u + \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega a_{ij}2\eta(\partial_i\eta)u\partial_j u \\
&\geq \alpha_0\|\eta\nabla u\|_{L^2(\Omega)} - C\|u\|_{L^2(W_2)}\|\eta\nabla u\|^2_{L^2(W_2)} \\
&\geq \frac{\alpha_0}{2}\|\eta\nabla u\|^2_{L^2(W_2)} - C\|u\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|\int_\Omega \varphi f - \int_\Omega a_0\varphi u| &\leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq C\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

d.h.

$$\|\nabla u\|_{L^2(W_2)} \leq \|\eta\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Also

$$\|u\|_{H^1(W_2)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

$\square$

Theorem 14.2 (Höhere innere Regularität). *Sei $a_{ij}, a_0 \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in H^m(\Omega)$ und $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von (16). Dann ist $u \in H^{m+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und für $V \subset \Omega$ mit $\overline{V} \subset \Omega$ gilt:*

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C\left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

wobei C nur von Ω, V und a_{ij}, a_0 abhängt.

Proof. Der Fall $m = 0$ ist klar. Sei nun $m \in \mathbb{N}$ und das Theorem gelte für m. Insbesondere gilt dann $u \in H^{2+m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und für alle $V \subset \Omega$ mit $\overline{V} \subset \Omega$ existiert $C > 0$ mit

$$\|u\|_{H^{2+m}(V)} \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}), \quad f \in H^m(\Omega). \tag{18}$$

Wir zeigen, dass das Theorem dann auch für $m+1$ gilt.
Sei $W \subset \Omega$ mit $\overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset \Omega$ und $|\alpha| = m+1$. Wähle $\tilde{\varphi} \in C^\infty_c(W)$ und $\varphi = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{\varphi}$. Mit partieller Integration erhalten wir

$$\sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega a_{ij} \partial_i \tilde{\varphi} \partial_j \tilde{u} = \int_\Omega \tilde{\varphi} \tilde{f} \tag{19}$$

mit $\tilde{u} = D^\alpha u \in H^1(W)$ und

$$\tilde{f} = D^\alpha f - \sum_{\beta \leq \alpha, \beta \neq \alpha} \left[-\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i (D^{\alpha-\beta} a_{ij} D^\beta \partial_j u) + D^{\alpha-\beta} a_0 D^\beta u \right].$$

Insbesondere folgt aus (18) $\tilde{f} \in L^2(W)$ und

$$\|f\|_{L^2(W)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Daher folgt mit Theorem 14.1

$$\|\tilde{u}\|_{H^2(V)} \leq C(\|\tilde{f}\|_{L^2(W)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(W)}) \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

d.h. $\|u\|_{H^{m+3}(V)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$. □

Sei nun $a_0 \in C(\overline{\Omega})$. Im nächsten Schritt betrachten wir das Problem

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_j \big(a_{ij} \partial_i u\big) + a_0 u &= f \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \Omega. \end{aligned} \tag{20}$$

Theorem 14.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ von der Klasse C^2, $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in H^1_0(\Omega)$ eine schwache Lösung von (20). Dann ist $u \in H^2(\Omega)$ und es gilt:*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

wobei C nur von Ω und a_{ij}, a_0 abhängt.

Proof. Schritt 1:
Sei $\Omega = B(0,1) \cap \mathbb{R}^d_+$ und setze $V = B(0, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{R}^d_+$. Wähle $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\xi \equiv 1$ auf $B(0, \frac{1}{2})$, $\xi \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)$ und $0 \le \xi \le 1$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ mit $u|_{\partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}^d_+} = 0$ und

$$\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega a_{ij} \partial_j \varphi \partial_i u = \int_\Omega \varphi \tilde{f}, \quad \varphi \in H^1_0(\Omega),$$

wobei $\tilde{f} = f - a_0 u$. Für $k = 1, \ldots, d-1$ setze $\varphi := -D_k^{-h}(\xi^2 D_k^h u)$. Da

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= -\frac{1}{h} D_k^{-h} \left(\xi^2(x) \left[u(x + he_k) - u(x) \right] \right) \\
&= \frac{1}{h^2} \left(\xi^2(x - he_k)[u(x) - u(x - he_k)] - \xi^2(x)[u(x + he_k) - u(x)] \right), \\
&\quad x \in \Omega,
\end{aligned}$$

folgt $\varphi \in H^1_0(\Omega)$. Wie im Beweis von Theorem 14.1 erhalten wir

$$\|D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(V)} \le C \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \right),$$

d.h. $\partial_k u \in H^1(V)$ für $k = 1, \ldots, d-1$ und

$$\sum_{k,l=1, k+l<2d}^d \|\partial_k \partial_l u\|_{L^2(V)} \le C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right). \tag{21}$$

Desweiteren gilt:

$$a_{dd} \partial_d \partial_d u = \sum_{i,j=1, i+j<2d}^d a_{ij} \partial_i \partial_j u - \sum_{i,j=1}^d (\partial_j a_{ij}) \partial_i u - a_0 u + f.$$

Aus der Elliptizität folgt $a_{dd} \ge \alpha_0 > 0$, also

$$\|\partial_d \partial_d u\|_{L^2(V)} \le C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right). \tag{22}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha \|u\|^2_{H^1(\Omega)} &\le \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \partial_j u \partial_i u = \int_\Omega uf - \int_\Omega a_0 u^2 \\
&\le \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|u\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned} \tag{23}$$

Aus (21), (22) und (23) folgt nun

$$\|u\|_{H^2(V)} \le C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Schritt 2:
Sei nun Ω beliebig und wähle zu $x \in \partial\Omega$

$$\Phi_x : \Omega' := B(x,r) \cap \mathbb{R}^d_+ \to U(x),$$

$V' := B(x, r/2) \cap \mathbb{R}^d$ für ein $r > 0$ (vgl. Definition 11.2. Setze $V := \Phi_x(V')$. und $u' = u \circ \Phi_x$. Dann gilt $u' \in H^1(\Omega')$, $u|_{\partial\Omega' \cap \mathbb{R}^d_+} = 0$ und (dies ist noch zu Zeigen)

$$\sum_{i,j=1}^{d} \int_{\Omega} a'_{ij} \partial_j \varphi' \partial_i u' = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{d} b'_i \varphi' \partial u' + \int_{\Omega} a'_0 \varphi' u' + \int_{\Omega} \varphi' f',$$

mit $f' = f \circ \Phi_x$ und geeigneten a'_{ij}, b'_i und a'_0. Außerdem gilt (auch dies ist noch zu Zeigen)

$$\sum_{i,j=1}^{d} a'_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha' |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Nach dem ersten Schritt ist $u' \in H^2(V')$ und es gilt

$$\|u'\|_{H^2(V')} \leq C(\|f'\|_{L^2(\Omega')} + \|u'\|_{L^2(\Omega')}),$$

wobei $C > 0$ unabhängig von f' ist. Also ist $u \in H^2(V)$ und es gilt

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

mit einer von f unabhängigen Konstante C.
Da $\partial\Omega$ kompakt ist, können wir $\partial\Omega$ mit endlich vielen $V_1, \ldots, V_N$ überdecken. Dies liefert zusammen mit der inneren Regularität die gewünschte Abschätzung. □

Analog zu Theorem 14.2 erhalten wir

Theorem 14.4. *Sei $a_{ij}, a_0 \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in H^m(\Omega)$ und $u \in H^1_0(\Omega)$ eine schwache Lösung von (20). Dann ist $u \in H^{m+2}(\Omega)$ und es gilt:*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

wobei C nur von Ω und a_{ij}, a_0 abhängt.

Proof. Ohne Beweis. □

Korollar 14.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ von der Klasse C^2, $a_0(x) \geq 0$ für $x \in \Omega$, $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in H^1_0(\Omega)$ eine schwache Lösung von (20). Dann ist $u \in H^2(\Omega)$ und es gilt:*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei C nur von Ω und a_{ij}, a_0 abhängt.

Proof. Klar. □

Bemerkung 14.6. *Alle Resultate dieses Kapitels bleiben auch richtig für Gleichungen der Form*

$$-\sum_{i,j=1}^{d} \partial_j \big(a_{ij} \partial_i u\big) + \sum_{i=1}^{d} b_i \partial_i u + a_0 u = f \text{ in } \Omega$$
$$u = 0 \text{ auf } \Omega.$$

15. Hauptsätze für lineare Operatoren

Definition 15.1. *Sei X ein metrischer Raum und $M \subseteq X$.*

(a) *M heißt* nirgends dicht *in X, falls $\overline{M}$ keinen inneren Punkt enthält.*
(b) *M heißt von* 1. Kategorie *in X, falls es eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist.*
(c) *M heißt von* 2. Kategorie*, falls M nicht von 1. Kategorie ist.*

Satz 15.2 (Baire–Kategoriensatz)**.** *Jeder vollständige, metrische Raum $X \neq \emptyset$ ist von 2. Kategorie in sich. Ist also $X \neq \emptyset$ vollständig und $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, wobei A_n abgeschlossen sind, dann enthält wenigstens ein A_n eine nicht leere, offene Teilmenge.*

Proof. Idee: Annahme: X wäre von 1. Kategorie in sich. Dann würde

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

gelten, mit nirgends dichten Mengen M_n. Wir konstruieren eine Cauchyfolge (x_n) deren Grenzwert x in keinem M_n enthalten ist. So erhalten wir dann einen Widerspruch.

Konstruktion dieser Folge: Da M_1 nirgends dicht und $\mathring{X} \neq \emptyset$ ist, ist $X \setminus \overline{M_1}$ offen und nicht leer. Daher finden wir $x_1 \in X$ und $1 > r_1 > 0$ mit $B(x_1, r_1) \cap \overline{M_1} = \emptyset$. Es seien $n > 1$ und r_k, x_k, $k < n$ definiert. Da M_n nirgends dicht ist, ist

$$B(x_{n-1}, \frac{r_{n-1}}{2}) \cap X \setminus \overline{M_n} \neq \emptyset$$

und offen. Daher existiert wir $x_n \in B(x_{n-1}, r_{n-1})$ und $0 < r_n < r_{n-1}/2$ mit $B(x_n, r_n) \cap \overline{M_n} = \emptyset$. Nach Konstruktion ist (x_n) eine Cauchyfolge, und wegen der Vollständigkeit von X konvergiert x_n gegen ein x. Ferner für $m > n$ gilt $d(x, x_n) \leq d(x, x_m) + d(x_m, x_n) \leq d(x, x_m) + r_n/2 \to r_n/2$, d.h. $x \in B(x_n, r_n) \subseteq X \setminus \overline{M_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$. ☐

Theorem 15.3 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** *Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Vektorraum und $T_\alpha \in \mathscr{L}(X,Y)$ für $\alpha \in I$. Ist*

$$\sup_{\alpha\in I} \|T_\alpha x\|_Y < +\infty, \quad x \in X,$$

so gilt

$$\sup_{\alpha\in I} \|T_\alpha\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < +\infty.$$

Proof. Definiere

$$E_n := \Big\{ x \in X : \sup_{\alpha\in I} \|T_\alpha x\|_Y \leq n \Big\}.$$

Aus der Voraussetzung folgt, dass $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ gilt. Ferner sind die Mengen E_n abgeschlossen, denn

$$E_n = \bigcap_{\alpha\in I} \|T_\alpha(\cdot)\|_Y^{-1}([0,n]).$$

Nach dem Baire-Kategoriensatz existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$ und $r > 0$ mit $B(x_0, r) \subseteq E_{n_0}$. Sei $x \in X$ beliebig und setze $z = x_0 + rx/(2\|x\|)$, dann gilt $\|z-x_0\| \leq r/2$ und insbesondere $z \in B(x_0, r)$. Daraus folgt $\|T_\alpha x_0\|, \|T_\alpha z\| \leq n_0$ für alle $\alpha \in I$. Also gilt

$$\|T_\alpha x\| = \frac{2\|x\|}{r}\|T_\alpha(z - x_0)\| \leq \frac{4n_0}{r}\|x\|.$$

□

Satz 15.4 (Banach–Steinhaus)**.** *Es seien X, Y Banachräume und $T_n \in \mathscr{L}(X,Y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in X$ existiere $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$. Dann ist $T \in \mathscr{L}(X,Y)$.*

Proof. T ist linear, und verwende Theorem 15.3. □

Definition 15.5. *Eine Abbildung T zwischen metrischen Räumen X, Y heißt* offen*, wenn das Bild TU einer offenen Menge U in X offen in Y ist.*

Bemerkung 15.6. *(a) Sei T bijektiv. Dann T offen $\Longleftrightarrow T^{-1}$ stetig.*
(b) Ist $T : X \to Y$ linear, so gilt

$$T \text{ offen} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \delta > 0\; B(0,\delta) \subseteq TB(0,1).$$

Proof. Definition nachrechnen. □

Lemma 15.7. *Es seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear, stetig und surjektiv. Dann existiert $\delta > 0$ mit $B(0,\delta) \subseteq T(B(0,1))$.*

Proof. Der Beweis besteht aus drei Schritten:
[1.]
(a) $\overline{T(B(0,1/2))}$ enthält eine offene Kugel.
(b) $\overline{T(B(0,1/2^n))}$ enthält eine offene Kugel um 0.
(c) $T(B(0,1))$ enthält eine offene Kugel um 0.

1. Schritt: Mit $B := B(0,1/2) \subseteq X$ gilt $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB$. Aus den Eigenschaften von T folgt

$$Y = T(X) = T\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(nB) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{nT(B)}.$$

Da Y vollständig ist, folgt aus dem Baire–Kategoriensatz, dass $\overline{nT(B)}$ für ein n eine offene Kugel enthält. Daraus folgt dasselbe für $\overline{T(B)}$, d.h. $B(y_0, \varepsilon) \subseteq \overline{T(B)}$ gilt mit einem $\varepsilon > 0$.

2. Schritt: Das obige Argument gibt ein $\varepsilon > 0$ und ein $y_0 \in \overline{T(B)}$ mit $B(y_0,\varepsilon) - y_0 \subseteq \overline{T(B)} - y_0$. Sei $y \in B(0,\varepsilon) \subseteq \overline{T(B)} - y_0$, also $y + y_0 \in \overline{T(B)}$.

Dann existiert eine Folge $u_n = Tw_n \in T(B)$ mit $u_n \to y + y_0$ und $v_n = Tz_n \in T(B)$ mit $v_n \to y_0$. Dann $w_n - z_n \in B(0,1)$, $Tw_n - Tz_n \to y$, also $y \in \overline{TB(0,1)}$. Das heißt $B(0,\varepsilon) = B(y_0,\varepsilon) - y_0 \subseteq \overline{TB(0,1)}$, und daraus $B(0,\varepsilon/2^n) \subseteq \overline{TB(0,1/2^n)}$.

3. Schritt: Wir zeigen $B(0,\varepsilon/2) \subseteq TB(0,1)$. Sei $y \in B(0,\varepsilon/2)$, und wähle $Tx_1 \in TB$ mit $\|y - Tx_1\| \le \varepsilon/4 \Longrightarrow y - Tx_1 \in \overline{TB(0,1/2^2)}$ nach Schritt 2. Ferner existiert ein $Tx_2 \in TB(0,1/2^2)$ mit $\|(y - Tx_1) - Tx_2\| \le \varepsilon/8$. Also $y - Tx_1 - Tx_2 \in \overline{TB(0,1/2^3)}$ usw. So erhalten wir induktiv die Folge $x_n \in B(0,1/2^{n+1})$. Dann gilt

$$\Big\| y - \sum_{i=1}^{n} Tx_i \Big\| \le \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Setze $z_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, dann ist z_n eine Cauchyfolge (ausrechnen!), und konvergiert so gegen ein $z \in B(0,1)$. Weiter gilt $Tz_n \to Tz$ und so $Tz = y$, so schließlich $y \in TB(0,1)$. □

Satz 15.8 (Offene Abbildung)**.** *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ surjektiv. Dann ist T offen.*

Proof. Die Behauptung folgt aus Lemma 15.7 und Bemerkung 15.6. □

Korollar 15.9.
(a) Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ bijektiv $\Longrightarrow T^{-1}$ ist stetig.
(b) Sei X ein Vektorraum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen mit denen X vollständig ist, und die $\|x\| \le M|||x|||$ für alle $x \in X$ erfüllen. Dann sind die zwei Normen äquivalent.

Proof.
(a) Die Behauptung folgt aus Satz 15.8 und Bemerkung 15.6.
(b) Betrachte

$$\mathrm{Id} : (X, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|).$$

Dann ist Id bijektiv, d.h. $\mathrm{Id}^{-1} = \mathrm{Id}$ ist stetig nach (a). Also gilt;

$$|||x||| = |||\mathrm{Id}^{-1}(x)||| \le C\|x\|, \quad x \in X.$$

□

Definition 15.10 (abgeschlossener Operator)**.** *Seien X, Y normierte Vektorräume, $D \subseteq X$ Unterraum und $A : D \to Y$ linear. Der Operator A heißt* abgeschlossen*, falls*

$$\left.\begin{array}{rl} D \ni x_n \to & x \in X \\ Ax_n \to & y \in Y \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x \in D \text{ und } Ax = y.$$

Bemerkung 15.11.
(a) Ein Operator $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ ist abgeschlossen.
(b) Sei $A : D \to Y$ linear. Dann ist der Graph *von A gegeben durch*

$$\mathrm{gr}(A) := \{(x, Ax) : x \in D\} \subseteq X \times Y.$$

(c) $\mathrm{gr}(A)$ *ist ein Unterraum von $X \times Y$.*

(d) *A ist abgeschlossen* $\iff \mathrm{gr}(A)$ *ist abgeschlossen in* $X \times Y$.

Proof. ÜA. □

Beispiel 15.12. (a) *Sei* $X = C([0,1])$ *und* $A : X \supset C^1([0,1]) \to X$, $Af := f'$. *Dann ist A abgeschlossen.*

(b) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *beschränkt, von der Klasse* C^2,$X = L^2(\Omega)$ *und* $D(\Delta) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. *Dann ist* $\Delta : X \supset D(\Delta) \to X$ *abgeschlossen, aber nicht stetig fortsetzbar auf X.*

Proof. ÜA. □

Lemma 15.13. *Seien X, Y Banachräume,* $D \subseteq X$ *Unterraum und* $A : X \supset D \to Y$ *linear.*

(a) *D versehen mit der Graphnorm* $|||x|||_A := \|x\|_X + \|Ax\|_Y$ *ist ein Banachraumg gdw. A abgeschlossen ist.*

(b) $A : (D, |||\cdot|||_A) \to Y$ *ist stetig*

Proof. ÜA. □

Satz 15.14 (vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien X, Y Banachräume,* $D \subseteq X$ *Unterraum und* $A : D \to Y$ *linear und abgeschlossen. Ist D in X abgeschlossen, so ist A auch beschränkt. Insbesondere ist ein überall definierter abgeschlossener Operator stetig.*

Proof. Nach Lemma 15.13 ist $\mathrm{gr}(A)$ abgeschlossen in $X \times Y$. Betrachte die Abbildung $P : \mathrm{gr}(A) \to D$, $(x, Ax) \mapsto x$. Dann ist P linear, beschränkt und bijektiv. Aus Korollar 15.9 erhalten wir die Stetigkeit von P^{-1}, und so

$$\|Ax\| \le \|Ax\| + \|x\| = \|(x, Ax)\| \le M\|x\| \qquad \text{für alle } x \in D.$$

□

16. Spektrum und Resolvente

In diesem Abschnitt sei stets X ein Banachraum über $\mathbb{C}$.

Definition 16.1. *Sei T ein abgeschlossener, linearer Operator* $T : X \supset D(T) \to X$.

(a) *Die Menge aller* $\lambda \in \mathbb{C}$ *für die* $\lambda - T$ *stetig invertierbar ist heißt* die Resolventenmenge *von T und wird mit $\rho(T)$ bezeichnet. Ist* $\lambda \in \rho(T)$, *heißt* $R(\lambda, T) := (\lambda - T)^{-1}$ die Resolvente *von T im Punkt λ.*

(b) *Die Menge* $\mathbb{C} \setminus \rho(T)$ *heißt* das Spektrum *von T, die Bezeichnung ist* $\sigma(T)$.

Satz 16.2 (Resolventengleichung)**.** *Sei T ein linearer Operator und* $\lambda \in \rho(T)$. *Dann gilt*

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\lambda - \mu) R(\lambda, T) R(\mu, T).$$

Proof. Seien $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Nach Definition

$$\begin{aligned}(\lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A))R(\mu, A) = R(\mu, A) \quad \text{und}\\ R(\lambda, A)(\mu R(\mu, A) - AR(\mu, A)) = R(\lambda, A).\end{aligned}$$

Nach Substraktion der zwei Gleichungen erhalten wir die Behauptung. □

Definition 16.3 (Spektralradius)**.** *Sei $T \in \mathscr{L}(X)$. Dann heißt*

$$r(T) := \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n},$$

der Spektralradius *von T.*

Lemma 16.4 (Fekete)**.** *Sei $0 < s_n$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass $s_{n+m} \le s_n \cdot s_m,\ n, m \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $s_n^{1/n}$ gegen $s := \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n^{1/n}$.*

Proof. Sei $\varepsilon > 0$, und $n \in \mathbb{N}$ so, daß $s_n^{1/n} \le s+\varepsilon$. Wir schreiben $m = tn+r_m$ mit $t, r_m \in \mathbb{N}$, $1 \le r_m < n$. Dann gilt:

$$s_m \le s_{tn}s_{r_m} \le s_n^t s_{r_m} \le (s+\varepsilon)^{nt}s_{r_m} = (s+\varepsilon)^{nt+r_m}(s+\varepsilon)^{-r_m}s_{r_m}.$$

Da für r_m nur endlich viele Möglichkeiten existieren, erhalten wir $s_m^{1/m} \le (s+\varepsilon)(s+\varepsilon)^{-r_m/m}s_{r_m}^{1/m} \to s+\varepsilon$ für $m \to \infty$. Das heißt für genügend großes $m \in \mathbb{N}$ gilt $s \le s_m^{1/m} \le s+2\varepsilon$. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Bemerkung 16.5. *(a) $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ existiert und ist gleich $r(T)$.*
(b) $r(T) \le \|T\|$, $r(ST) = r(TS)$.

Proof. (a) Lemma von Fekete.
(b) $r(T) \le \|T\|$ folgt aus der Definition. Wegen

$$\|(ST)^n\|^{\frac{1}{n}} \le \left(\|S\|\|(TS)^{n-1}\|\|T\|\right)^{\frac{1}{n}},$$

gilt $r(ST) \le r(TS)$. Analog, $r(TS) \le r(ST)$.

□

Satz 16.6 (Neumann–Reihe)**.** *Sei $T \in \mathscr{L}(X)$ und $a \in \mathbb{C}$, $r(T) < |a|$. Dann ist $a \in \rho(T)$ und*

$$R(a, T) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-(n+1)}T^n.$$

Proof. Die Reihe hier konvergiert, denn sei $r(T) < a' < |a|$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \|a^{-(n+1)}T^n\| &\le \sum_{n=0}^{\infty} |a|^{-(n+1)}\|T^n\|\\ &\le \sum_{n=0}^{n_0-1} |a|^{-(n+1)}\|T^n\| + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a|^{-(n+1)}a'^n < +\infty.\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$(a-T)\sum_{n=0}^{\infty} a^{-(n+1)}T^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-(n+1)}T^n(a-T)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}T^n - \sum_{n=0}^{\infty} a^{-(n+1)}T^{n+1} = Id.$$

□

Satz 16.7. *Sei A ein abgeschlossener, linearer Operator. Die Resolventenmenge $\rho(A)$ ist offen in $\mathbb{C}$, also ist $\sigma(A)$ abgeschlossen.*

Proof. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \rho(A)$. Dann gilt:

$$\lambda - A = \mu - A + \lambda - \mu = (Id - (\mu-\lambda)R(\mu, A))(\mu - A).$$

Falls $|\mu - \lambda| < 1/\|R(\mu, A)\|$, ist der Operator $(Id - (\mu - \lambda)R(\mu, A))$ invertierbar, da die Neumannsche Reihe

$$(Id - (\mu-\lambda)R(\mu, A))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu-\lambda)^n R(\mu, A)^n$$

konvergiert. Dies zeigt $B\big(\mu, \frac{1}{\|R(\mu,A)\|}\big) \subseteq \rho(A)$. □

Satz 16.8. *Die Funktion definiert $\rho(A) \ni \lambda \mapsto R(\lambda, A)$ ist analytisch.*

Proof. Folgt aus der Darstellung durch die Neumann–Reihe. □

Satz 16.9 (Spektrum beschränkter Operatoren)**.** *Sei $T \in \mathscr{L}(X)$. Dann ist $\sigma(T)$ kompakt, nicht leer und $\sigma(T) \subseteq \overline{B(0, r(T))}$. Ferner existiert ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = r(T)$.*

Proof. Nach Satz 16.7 ist das Spektrum abgeschlossen, und nach Satz 16.6 ist es beschränkt. Es gilt sogar $\sigma(T) \subseteq \overline{B(0, r(T))}$.

Annahme: $\sigma(T) = \emptyset$.
Wir zeigen, dass die Resolvente in ∞ gegen 0 konvergiert. Aus der Neumann–Reihe folgt

$$\|R(a, T)\| \leq \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\|T\|^n = \frac{1}{a(1 - \|T\|/a)} \leq \frac{2}{a},$$

falls $a > 2\|T\|$.
Auf $B(0, 2\|T\|)$ ist die Resolvente wegen Kompaktheit und Stetigkeit beschränkt. Da die Resolvente $R(\lambda, T)$ analytisch auf $\rho(T) = \mathbb{C}$ ist, folgt mit dem Satz von Liouville, dass $R(\lambda, T) = 0$. So erhalten wir einen Widerspruch.

Annahme: $\sigma(T) \subset B(0, r)$ für ein $r < r' < r(T)$
Sei $\varphi \in \mathscr{L}(X)'$. Dann ist $\varphi(R(\lambda, T))$ durch eine Potenzreihe um 0 gegeben, nämlich auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, r(T))}$. Aber die Reihe konvergiert auf jedem größeren

Kreisring, in dem $\varphi(R(\lambda,T))$ analytisch ist, also auch auf $\mathbb{C}\setminus\overline{B(0,r)}$. Insbesondere heißt das, dass $\varphi(T^n/\lambda^{n+1})$ für $|\lambda|>r$ beschränkt ist. Folglich ist auch T^n/λ^{n+1} beschränkt, d.h. $\|T^n\|\le M r'^{n+1}$, also $r(T)\le r'$. □

Definition 16.10 (Unterteilung des Spektrums)**.** *Sei $A : X \supset D(A)\to X$ ein abgeschlossener Operator.*

(a) $P\sigma(A) := \{\lambda :\ \lambda\in\mathbb{C},\ \lambda - A$ *ist nicht injektiv*$\}$ *heißt das* Punktspektrum *von A und $\lambda\in P\sigma(A)$ heißen* Eigenwerte*. Der Vektor $0\neq x\in D(A)$ heißt* Eigenvektor *zu λ falls $Ax=\lambda x$.*

(b) $A\sigma(A) := \{\lambda :\ \lambda\in\mathbb{C}, \mathrm{im}(\lambda-A)$ *ist nicht abgeschlossen oder $\lambda - A$ ist nicht injektiv*$\}$ *heißt das* approximative Punktspektrum *von A*

(c) $R\sigma(A) := \{\lambda :\ \lambda\in\mathbb{C},\ \mathrm{im}(\lambda-A)$ *ist nicht dicht in X*$\}$ *heißt das* Residualspektrum *von A*

Bemerkung 16.11. *Sei A ein abgeschlossener Operator. Dann gilt*

$$\sigma(A) = P\sigma(A)\cup A\sigma(A)\cup R\sigma(A).$$

Proof. Da A abgeschlossen ist, ist $\lambda\in\rho(A)$ gdw. $\lambda-A$ bijektiv ist (vgl. ÜA.).
Sei $\lambda\notin P\sigma(A)\cup A\sigma(A)\cup R\sigma(A)$. Da $\lambda\notin P\sigma(A)$, ist $\lambda-A$ injektiv. Da $\lambda\notin R\sigma(A)\cup A\sigma(A)$, ist $\mathrm{im}(\lambda-A)$ dicht und abgeschlossen, d.h. $\lambda-A$ ist surjektiv. □

Satz 16.12 (Spektraler Abbildungssatz für Resolventen)**.** *Sei $A : X\supset D(A)\to X$ linear mit $\rho(A)\neq\emptyset$. Dann gilt:*

(a) $\sigma(R(\lambda_0,A))\setminus\{0\} = \{\frac{1}{\lambda_0-\mu} :\ \mu\in\sigma(A)\}$ *für alle $\lambda_0\in\rho(A)$.*

(b) Insbesondere gilt die Aussage für $P\sigma(A)$, $A\sigma(A)$, $R\sigma(A)$.

Proof. Sei $0\neq\mu\in\mathbb{C}$ und $\lambda_0\in\rho(A)$.

$$\begin{aligned}(\mu - R(\lambda_0,A))x &= \mu((\lambda_0-\tfrac{1}{\mu})-A)R(\lambda_0,A)x \quad \text{für } x\in X\\ &= \mu R(\lambda_0,A)((\lambda_0-\tfrac{1}{\mu})-A)x \quad \text{für } x\in D(A).\end{aligned}$$

Also $\ker(\mu-R(\lambda_0,A)) = \ker((\lambda_0-\frac{1}{\mu})-A)$ und $\mathrm{im}(\mu-R(\lambda_0,A)) = \mathrm{im}((\lambda_0-\frac{1}{\mu})-A)$. □

Korollar 16.13. *Sei $\lambda\in\rho(A)$. Dann $\|R(\lambda,A)\|\ge r(R(\lambda,A))\ge\frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda,\sigma(A)}$.*

Proof. Folgt aus Bemerkung 16.5 und dem Spektralen Abbildungssatz für Resolventen. □

Lemma 16.14. *Für einen abgeschlossenen, linearen Operator A ist $\lambda\in\mathbb{C}$ in $A\sigma(A)$ genau dann, wenn eine Folge $(x_n)\in D(A)$ mit $\|x_n\|=1$ und $\|\lambda x_n - Ax_n\|\to 0$ existiert.*

Proof. Ist A nicht injektiv, gilt die Aussage trivialerweise. Sei also A injektiv, d.h. es existiert der Operator $(\lambda-A)^{-1} : (\mathrm{im}(\lambda-A), \|\cdot\|)\to X$. Der Operator hier ist abgeschlossen, und daher, nach Satz 15.14 (Satz vom abgeschlossenen Graphen), genau dann *nicht* beschränkt, wenn $\mathrm{im}(\lambda-A)$ *nicht* abgeschlossen ist. Aber die Nicht-Beschränktheit des Operators $(\lambda - A)^{-1} : (\operatorname{im}(\lambda - A), \|\cdot\|) \to X$ ist zu der Bedingung im Satz äquivalent. □

Lemma 16.15. *Für einen abgeschlossenen, linearen Operator A gilt*

$$\partial\sigma(A) \subseteq A\sigma(A).$$

Proof. Sei $\mu \in \partial\sigma(A) \subseteq \sigma(A)$ und $\lambda_n \to \mu$ mit $\lambda_n \in \rho(A)$. Aus Korollar 16.13 folgt, dass $\|R(\lambda_n, A)\| \to +\infty$ gilt. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit existiert $x \in X$ mit $\|R(\lambda_n, A)x\| \to +\infty$. Setze $x_n := \frac{R(\lambda_n,A)x}{\|R(\lambda_n,A)x\|}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\mu - A)x_n &= (\mu - \lambda_n)x_n + (\lambda_n - A)x_n \\ &= (\mu - \lambda_n)x_n + \frac{x}{\|R(\lambda_n, A)x\|} \to 0, \quad \text{d.h. } \mu \in A\sigma(A).\end{aligned}$$

□

Definition 16.16. *Sei $A : D(A) \to X$ dicht definiert, dann ist der* adjungierte Operator *A' wie folgt definiert:*

$$D(A') := \{\varphi \in X' : \, x \mapsto \varphi(Ax) \text{ ist stetig}\}.$$

Für $\varphi \in D(A')$ ist $\psi(x) := A'\varphi(x) := \varphi(Ax)$ ein dicht definiertes, stetiges Funktional, also eindeutig fortsetzbar auf X'. Somit definiert man den adjungierten Operator $A'\varphi := \psi$ als die Fortsetzung von ψ.

Satz 16.17 (Spektrum adjungierter Operatoren)**.** *Für einen dicht definierten, abgeschlossenen, linearen Operator A gelten die folgende Aussagen:*

(a) *$\sigma(A) = \sigma(A')$ und für $\lambda \in \rho(A)$ gilt $R(\lambda, A)' = R(\lambda, A')$.*
(b) *$R\sigma(A) = P\sigma(A')$.*

Proof. (a) Sei $\lambda \in \rho(A)$ und $x \in D(A)$, $\varphi \in D(A')$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi((\lambda - A)R(\lambda, A)x) = ((\lambda - A')\varphi)((R(\lambda, A)x) \\ &= (R(\lambda, A)'(\lambda - A')\varphi)(x), \quad x \in X.\end{aligned}$$

Also gilt $R(\lambda, A)'(\lambda - A')\varphi = \varphi$. Jetzt sei $\varphi \in X'$ beliebig.

$$\varphi(x) = \varphi(R(\lambda, A)(\lambda - A)x) = (R(\lambda, A)'\varphi)((\lambda - A)x), \quad x \in D(A),$$

also ist $x \mapsto (R(\lambda, A)'\varphi)((\lambda - A)x)$ stetig, d.h. $R(\lambda, A)' \in D(A')$. Daraus folgt $(\lambda - A')R(\lambda, A)'\varphi = \varphi$, d.h. $\lambda \in \rho(A')$ und $R(\lambda, A') = R(\lambda, A)'$. Umgekehrt sei jetzt $\lambda \in \rho(A')$. Für $x \in D(A)$ sei $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi(x) = \|x\|$. Also

$$\begin{aligned}\|x\| &= |\varphi(x)| = |((\lambda - A')R(\lambda, A')\varphi)(x)| = |(R(\lambda, A')\varphi)((\lambda - A)x)| \\ &\le \|R(\lambda, A')\| \cdot \|(\lambda - A)x\|,\end{aligned}$$

d.h. $\lambda - A$ ist injektiv. Daraus folgt auch, dass $\operatorname{im}(\lambda - A)$ abgeschlossen ist. Denn sei $(\lambda - A)x_n \to y$. Obige Abschätzung zeigt, dass $x_n \to x$ mit $x \in X$. Die Abgeschlossenheit von A liefert $(\lambda - A)x = y$.

Annahme: $\operatorname{im}(\lambda - A)$ ist nicht dicht.
Dann existiert ein $0 \neq \varphi \in X'$ mit $\operatorname{im}(\lambda - A) \subseteq \ker \varphi$, d.h.

$$0 = \varphi((\lambda - A)x) = \left((\lambda - A)'\varphi\right)(x)$$

und $\varphi \in \ker(\lambda - A)'$. So erhält man ein Widerspruch zur Injektivität von $\lambda - A'$.

(b) Sei $\operatorname{im}(\lambda - A)$ nicht dicht. Nach dem Satz von Hahn–Banach existiert dann ein $0 \neq \varphi \in \ker(\lambda - A')$.
Sei $0 \neq \varphi \in \ker(\lambda - A')$. Dann ist $\varphi(\operatorname{im}(\lambda - A)) = 0$, d.h. $\overline{\operatorname{im}(\lambda - A)} \neq X$. □

17. Spektrum kompakter Operatoren

In diesem Abschnitt sei X stets ein Banachraum über $\mathbb{R}$ und T ein kompakter Operator.

Satz 17.1. *Sei $T \in \mathscr{L}(X)$ kompakt. Für $\lambda \neq 0$ gelten*
- *(a)* $\dim \ker(\lambda - T) < +\infty$
- *(b)* $\operatorname{im}(\lambda - T)$ *ist abgeschlossen*

Proof. (a) Betrachte $S = T$ eingeschränkt auf $\ker(\lambda - T) =: Y$. Dann gilt $S \in \mathscr{L}(Y)$ und $S = \lambda Id$. Da S kompakt, folgt $\dim Y < \infty$ nach Korollar 3.8.

(b) Es sei $(\lambda - T)x_n \to x$, also $x \in \overline{\operatorname{im}(\lambda - T)}$. Es ist zu zeigen, dass $x \in \operatorname{im}(\lambda - T)$. OBDA können wir annehmen $\|x_n\| \leq 2d_n$, mit $d_n := \operatorname{dist}(x_n, \ker(\lambda - T))$.

Annahme: d_n ist unbeschränkt
Es existiert eine Teilfolge mit $d_n \to \infty$ (Wir bezeichen die Teilfolge wieder mit d_n). Setze $y_n := x_n/d_n$, also $(\lambda - T)y_n \to 0$, denn $(\lambda - T)x_n \to x$. Da y_n beschränkt und T kompakt ist, hat Ty_n eine weitere Teilfolge, die wir wieder mit y_n bezeichnen, die gegen ein y konvergiert. Es gilt $y_n = 1/\lambda(Ty_n + (\lambda - T)y_n) \to y/\lambda$, und so gilt $Ty_n \to Ty/\lambda$. Dies zeigt $y = Ty/\lambda$, d.h. $y \in \ker(\lambda - T)$.

$$\begin{aligned}\|\lambda y_n - y\| &\geq |\lambda| \operatorname{dist}(y_n, \ker(\lambda - T)) = |\lambda| \operatorname{dist}(\tfrac{x_n}{d_n}, \ker(\lambda - T)) \\ &= \tfrac{|\lambda|}{d_n} \operatorname{dist}(x_n, \ker(\lambda - T)) = |\lambda|.\end{aligned}$$

Das ist unmöglich, folglich war unsere Annahme falsch, also ist d_n beschränkt.
Wegen der Kompaktheit hat Tx_n eine konvergente Teilfolge, $Tx_n \to z$. Da $(\lambda - T)x_n \to x$, folgt

$$x \leftarrow (\lambda - T)x_n = (\lambda - T)\tfrac{1}{\lambda}(Tx_n + (\lambda - T)x_n) \to \tfrac{(\lambda - T)}{\lambda}(z + x),$$

und $x \in \operatorname{im}(\lambda - T)$. □

Korollar 17.2. *Sei $T \in \mathscr{L}(X)$ kompakt. Für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\lambda \neq 0$ ist*

(a) $\dim\ker(\lambda - T)^n < \infty$, *und*
(b) $\operatorname{im}(\lambda - T)^n$ *abgeschlossen.*

Proof.

$$(\lambda - T)^n = \lambda^n Id + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \lambda^{n-i}(-T)^i = \lambda^n Id - \underbrace{T \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \lambda^{n-i}(-T)^{i-1}}_{\text{kompakt}},$$

und verwende Satz 17.1. □

Bemerkung 17.3.

(a) $\{0\} = \ker(\lambda - T)^0 \subset \ker(\lambda - T)^1 \subseteq (\ker -T)^2 \subset \cdots$
(b) $X = \operatorname{im}(\lambda - T)^0 \supset \operatorname{im}(\lambda - T)^1 \supset \operatorname{im}(\lambda - T)^2 \supset \cdots$

Lemma 17.4. *Sei $\lambda \neq 0$ und $K \in \mathscr{L}(X)$ kompakt.*

(a) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\ker(\lambda - T)^n = \ker(\lambda - T)^{n+1} = \ker(\lambda - T)^{n+l} \qquad \forall l \in \mathbb{N}.$$

(b) Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{im}(\lambda - T)^m = \operatorname{im}(\lambda - T)^{m+1} = \operatorname{im}(\lambda - T)^{m+l} \qquad \forall l \in \mathbb{N}.$$

(c) Sei n_λ bzw. m_λ die minimale Zahl mit der Eigenschaft aus (a) bzw. (b). Dann gilt $n_\lambda = m_\lambda$.

Proof. (a) Notation: $N_n := \ker(\lambda - T)^n$. Nehmen wir an, dass die Behauptung falsch ist, nämlich $N_n \subsetneqq N_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das Riesz–Lemma 3.7 liefert $y_n \in N_n$, $\|y_n\| = 1$, und $\|y_n - x\| \geq 1/2$ für alle $x \in N_{n-1}$. Sei $m < n$, dann

$$Ty_n - Ty_m = \lambda y_n - (\underbrace{(\lambda - T)y_n + \lambda y_m - (\lambda - T)y_m}_{=:x \in N_{n-1}}).$$

Also $\|Ty_n - Ty_m\| = |\lambda|\|y_n - x/|\lambda|\| \geq |\lambda|/2$, aber dann besitzt $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge. Das ist ein Widerspruch zur Kompaktheit von T. D.h. $N_m = N_{m+1}$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Sei nun $x \in N_{m+l+1}$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Dann gilt $y := (\lambda - T)^l x \in N_{m+1}$, also auch $y \in N_m$ und somit $x \in N_{m+l}$. Hieraus folgt $N_m = N_{m+l}$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

(b) Methode wie in (a). Notation $R_n := \operatorname{im}(\lambda - T)^n$.

<u>Ann.</u>: $R_{n+1} \neq R_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Da R_n nach Lemma 17.2 abgeschlossen ist, können wir das Riesz–Lemma verwenden, also existiert $y_n \in R_n$, $\|y_n\| = 1$, $\|y_n - x\| \geq 1/2$ für jedes $x \in R_{n+1}$. Sei $m < n$, dann

$$Ty_m - Ty_n = \lambda y_m - (\underbrace{(\lambda - T)y_m + \lambda y_n - (\lambda - T)y_n}_{=:y \in R_{m+1}}).$$

Also $\|Ty_m - Ty_n\| = |\lambda|\|y_m - x/|\lambda|\| \geq |\lambda|/2$. Wie im Teil (a) ist dies ein Widerspruch zur Kompaktheit von T.

(c) Schritt 1: $m_\lambda \geq n_\lambda$.
Aus (b) folgt $R_{m_\lambda+1} = R_{m_\lambda}$, d.h. $(\lambda - T)R_{m_\lambda} = R_{m_\lambda}$.

Beh.: Für $x \in R_{m_\lambda}$ mit $(\lambda - T)x = 0$ gilt $x = 0$.
Wenn es nicht so wäre, fänden wir $0 \neq x_1 \in R_{m_\lambda} = R_{m_\lambda+1}$ mit $(\lambda - T)x_1 = 0$. So existierte $x_2 \in R_{m_\lambda}$ mit $(\lambda - T)x_2 = x_1$, und induktiv erhielten wir die Folge $x_1, x_2, x_3, \dots \in R_{m_\lambda}$ mit $x_i = (\lambda - T)x_{i+1}$. Also $0 \neq x_1 = (\lambda - T)x_2 = (\lambda - T)^2 x_3 = \dots = (\lambda - T)^{n-1}x_n$ und $0 = (\lambda - T)x_1 = (\lambda - T)^2 x_2 = \dots = (\lambda - T)^n x_n$, d.h. $x_n \in N_n \setminus N_{n-1}$, ein Widerspruch zu (a).

Beh.: $N_{m_\lambda+1} = N_{m_\lambda}$ (dann folgt $m_\lambda \geq n_\lambda$ nach Definition)
Sei $x \in N_{m_\lambda+1}$, d.h. $(\lambda - T)^{m_\lambda+1}x = 0$. Da $y := (\lambda - T)^{m_\lambda}x \in R_{m_\lambda}$ ist und $(\lambda - T)y = 0$ gilt, folgt $y = 0$, d.h. $x \in N_{m_\lambda}$. Also $N_{m_\lambda+1} \subset N_{m_\lambda}$. Die Inklusion $N_{m_\lambda} \subset N_{m_\lambda+1}$ ist klar.

Schritt 2: $m_\lambda \leq n_\lambda$.
Sei $m_\lambda \geq 1$, sonst ist nichts zu beweisen. Nach Definition gilt $R_{m_\lambda} \subsetneqq R_{m_\lambda-1}$. Sei $y \in R_{m_\lambda-1} \setminus R_{m_\lambda}$. Dann ist $y = (\lambda - T)^{m_\lambda-1}x$ für ein x und $(\lambda - T)y \in R_{m_\lambda} = R_{m_\lambda+1}$, d.h. $(\lambda - T)y = (\lambda - T)^{m_\lambda+1}z$ für ein z. Es gilt:

$$(\lambda - T)^{m_\lambda-1}(x - (\lambda - T)z) = \underbrace{y}_{\notin R_{m_\lambda}} - \underbrace{(\lambda - T)^{m_\lambda}z}_{\in R_{m_\lambda}} \neq 0,$$

d.h. $x - (\lambda - T)z \notin N_{m_\lambda-1}$, aber $x - (\lambda - T)z \in N_{m_\lambda}$, denn

$$(\lambda - T)^{m_\lambda}(x - (\lambda - T)z) = (\lambda - T)y - (\lambda - T)y = 0.$$

Damit folgt $N_{m_\lambda-1} \subsetneqq N_{m_\lambda} \implies m_\lambda \leq n_\lambda$. □

Theorem 17.5 (Schauder)**.** *Sei $T \in \mathscr{L}(X)$ kompakt. Dann besteht $\sigma(T) \setminus \{0\}$ aus abzählbar vielen Eigenwerten mit 0 als einzig möglichem Häufungspunkt.*

Proof. Sei $0 \neq \lambda \notin P\sigma(T)$, dann $\ker(\lambda - T) = \{0\}$ und $\lambda - T$ ist injektiv. Lemma 17.4 (c) liefert $0 = n_\lambda = m_\lambda$. Folglich ist $\lambda - T$ bijektiv und aus Korollar 15.9(a) $\lambda \in \rho(T)$. Also $\sigma(T) \setminus \{0\} \subseteq P\sigma(T)$.

Behauptung: für alle $M > 0$ ist $\{\lambda \in P\sigma(T) : |\lambda| \geq M\}$ endlich.
Nehmen wir an, dass die Aussage falsch ist: $\exists\, M_0 > 0$ und eine Folge$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus verschiedenen Eigenwerten von T mit $|\lambda_n| \geq M_0$, und mit zugehörigen Eigenvektoren $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Setze $X_n := \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_n\}$, da $\dim X_n = n$ (dies beweist man mit Induktion), gilt $X_{n-1} \subsetneqq X_n$. Das Lemma von Riesz 3.7 liefert $x_n \in X_n$, $\|x_n\| = 1$, $\|x_n - x\| \geq 1/2$ für alle $x \in X_{n-1}$. Damit folgt

$$Tx_n - Tx_m = \lambda_n x_n - \underbrace{(\lambda_n x_n - Tx_n + Tx_m)}_{=:x\in X_{n-1}} \quad \text{für } m < n,$$

denn $x_m \in X_m \subseteq X_{n-1}$, also $Tx_m \in X_{n-1}$ und $X_n \ni x_n = \alpha_n e_n + y$, wobei $y \in X_{n-1} \implies (\lambda_n - T)x_n = (\lambda_n - T)y \in X_{n-1}$. Wie in dem Beweis von Lemma 17.4 (a) und (b) folgt, dass Tx_n keine konvergente Teilfolge hat, also ein Widerspruch. □

Satz 17.6 (Riesz–Zerlegung)**.** *Sei $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Dann gilt*

$$X = \ker(\lambda - T)^{n_\lambda} \oplus \operatorname{im}(\lambda - T)^{n_\lambda}.$$

Proof. Sei $x \in X$, und setzte $z = (\lambda - T)^{n_\lambda} x$, also $z \in R_{n_\lambda} = R_{2n_\lambda}$, d.h. $z = (\lambda - T)^{2n_\lambda} x_1$ für ein $x_1 \in X$. Sei $x_0 = (\lambda - T)^{n_\lambda} x_1$, also $x_0 \in R_{n_\lambda}$ und $(\lambda - T)^{n_\lambda} x_0 = z$. Daraus folgt $(\lambda - T)^{n_\lambda}(x - x_0) = z - z = 0$ und $x = (x - x_0) + x_0$. Ferner gilt $\ker(\lambda - T)^{n_\lambda} \cap \operatorname{im}(\lambda - T)^{n_\lambda} = \{0\}$, denn gehört x zum Durchschnitt, gilt $x = (\lambda - T)^{n_\lambda} y$ für ein y. Es gilt:

$$0 = (\lambda - T)^{n_\lambda} x = (\lambda - T)^{2n_\lambda} y,$$

also $y \in N_{2n_\lambda} = N_{n_\lambda}$, und so $x = (\lambda - T)^{n_\lambda} y = 0$. □

Korollar 17.7. *Die Unterräume in der obigen Zerlegung sind T-invariant und*

$$\sigma(T\big|_{\operatorname{im}(\lambda - T)^{n_\lambda}}) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}.$$

Proof. Notation: $R := R_{n_\lambda} = \operatorname{im}(\lambda - T)^{n_\lambda}, N := N_{n_\lambda} = \ker(\lambda - T)^{n_\lambda}$.
Sei $x \in R$. Dann gilt:

$$Tx = \underbrace{\lambda x}_{\in R} - \underbrace{(\lambda - T)x}_{\in R_{n_\lambda + 1} = R}.$$

Analoges Vorgehen für $x \in N$.
$(\lambda - T)$ ist surjektiv auf R nach Lemma 17.4. $(\lambda - T)$ ist injektiv auf R, da $\ker(\lambda - T) \subset N$ und $N \cap R = \{0\}$ nach Satz 17.6. Mit 15.9(a) folgt $\lambda \in \rho(T\big|_R)$.
Aus der T-Invarianz von N und R folgt die $(\mu - T)$-Invarianz von N und R f"ur alle $\mu \in \mathbb{C}$. Sei $\mu \neq \lambda$, $x = x_N + x_R \in X$ mit $x_N \in N$ und $x_R \in R$ sowie

$$y := y_N + y_R := \underbrace{(\mu - T)x_N}_{\in N} + \underbrace{(\mu - T)x_R}_{\in R} = (\mu - T)x.$$

Gilt $y \in R$, so folgt $x \in R$, denn aus $y_N = 0$ folgt

$$(\lambda - T)x_N = (\lambda - \mu)x_N + \underbrace{(\mu - T)x_N}_{= y_N = 0}$$

und hieraus

$$\underbrace{(\lambda - T)^{n_\lambda} x_N}_{=0} = (\lambda - \mu)^{n_\lambda} x_N,$$

wegen $\lambda \neq \mu$ also $x_N = 0$. F"ur $\mu \in \rho(T)$ folgt hieraus $\mu \in \rho(T\big|_R)$ und $R(\mu, T\big|_R) = R(\mu, T)\big|_R$.
Sei nun $\lambda \neq \mu \in P\sigma(T)$, d.h. es gibt $x = x_N + x_R \neq 0$ mit $(\mu - T)x = 0$. Wegen $x_N = 0$ (s.o.) gilt $x \in R$, also $\mu \in P\sigma(T\big|_R)$.
Nun kann es noch den Fall $0 = \mu \in \sigma(T) \setminus P\sigma(T)$ geben. Dann ist $(0 - T)$

nicht surjektiv, es gibt also $y = y_N + y_R \in X$ mit $Tx \neq y \ \forall x \in X$. T bildet auf y_N ab, denn

$$\begin{aligned}
& T\left(\sum_{k=1}^{n_\lambda} \frac{1}{\lambda^k}(\lambda - T)^{k-1} y_N\right) \\
= & \sum_{k=1}^{n_\lambda}\left[\lambda\left(\frac{1}{\lambda^k}(\lambda - T)^{k-1} y_N\right) - (\lambda - T)\left(\frac{1}{\lambda^k}(\lambda - T)^{k-1} y_N\right)\right] \\
= & \frac{1}{\lambda^0}(\lambda - T)^0 y_N - \underbrace{\frac{1}{\lambda^{n_\lambda}}(\lambda - T)^{n_\lambda} y_N}_{=0} = y_N.
\end{aligned}$$

Somit bildet T nicht auf y_R ab, also $\mu \in \sigma(T\big|_R) \setminus P\sigma(T\big|_R)$. Insgesamt hat man nun $\sigma(T\big|_R) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$. □

Theorem 17.8 (Riesz–Schauder, Spektralsatz für kompakte Operatoren)**.** *Sei $T \in \mathscr{L}(X)$ kompakt. Dann gelten die folgende Aussagen:*

(a) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *besteht aus abzählbar vielen Eigenwerten mit* 0 *als einzig möglichem Häufungspunkt.*
(b) $\dim X = \infty \Longrightarrow 0 \in \sigma(T)$
(c) Für $\lambda \neq 0$ *ist* $\dim \ker(\lambda - T)^n < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$
(d) Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ *existiert* $n_\lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *mit*

$$X = \ker(\lambda - T)^{n_\lambda} \oplus \operatorname{im}(\lambda - T)^{n_\lambda}.$$

Proof. Alle Aussagen sind bereits bewiesen. □

Korollar 17.9 (Fredholmsche Alternative)**.** *Sei $T \in \mathscr{L}(X)$ kompakt und $\lambda \neq 0$. Betrachte die Gleichung $\lambda x - Tx = y$ für ein $y \in X$. Dann gilt:* Entweder *ist die Gleichung $\lambda x - Tx = y$ für alle $y \in X$ lösbar,* oder *die Gleichung $\lambda x - Tx = 0$ hat nichttriviale Lösungen.*

Proof. Folgt aus Theorem 17.8. □

18. Selbstadjungierte Operatoren

In diesem Abschnitt seien H, H_1, H_2 Hilberträume über $\mathbb{C}$.

Definition 18.1. *Sei $T \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ und $\Phi_1 : H_1 \to H_1'$, $\Phi_2 : H_2 \to H_2'$ der kanonische Isomorphismus. Die* (Hilbertraum-)Adjungierte *T^* von T ist definiert durch*

$$T^* := \Phi_1^{-1} T' \Phi_2.$$

Bemerkung 18.2. *Für $T \in \mathscr{L}(H)$ gelten $T^* : H \to H$ und $T^* \in \mathscr{L}(H)$.*

Definition 18.3. *Ein linearer Operator $T \in \mathscr{L}(H)$ heißt*

(a) normal*, falls $TT^* = T^*T$;*
(b) unitär*, falls $TT^* = T^*T = Id$;*
(c) selbstadjungiert*, falls $T = T^*$.*

Definition 18.4. *Der* numerische Wertebereich *eines Operators $T \in \mathscr{L}(H)$ ist durch*

$$W(T) := \{\langle Tx, x\rangle : \|x\| \leq 1\}$$

gegeben. Außerdem sei

$$w(T) := \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| \leq 1\}.$$

Offensichtlich gilt $w(T) \leq \|T\|$.

Bemerkung 18.5. *Sei $T \in \mathscr{L}(H)$, $S, U \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$, $V \in \mathscr{L}(H_2, H)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Beziehungen:*
[a)]

(a) $\|S\| = \|S^*\|$, $S^{**} = S$, $(S+U)^* = S^* + U^*$, $(\lambda S)^* = \bar{\lambda} S^*$, $(VU)^* = U^* V^*$.

(b) $\|TT^*\| = \|T\|^2$, *denn*

$$\|T^*x\|^2 \leq w(TT^*) \leq \|TT^*\| \leq \|T\| \cdot \|T^*\| = \|T\|^2 \quad \forall \|x\| \leq 1,$$

also $\|T\|^2 = \|T^*\|^2 \leq \|TT^*\| \leq \|T\|^2$.
Ist T selbstadjungiert, gilt somit $\|T^2\| = \|T\|^2$.

(c) *Ist T normal, dann folgt $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für jedes $x \in H$, denn*

$$0 = \langle (TT^* - T^*T)x, x\rangle = \|T^*x\|^2 - \|Tx\|^2.$$

Insbesondere ist $\ker T = \ker T^*$.

(d) *Ist $T \in \mathscr{L}(H)$ normal, so ist $\lambda - T$ auch normal.*

(e) *Es gilt* $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$.

Satz 18.6. *Für $T \in \mathscr{L}(H)$ selbstadjungiert gilt $\|T\| = w(T)$.*

Proof. Es ist nur "$\leq$" zu zeigen. Durch ausrechnen folgt

$$\langle T(x+y), (x+y)\rangle - \langle T(x-y), (x-y)\rangle = 4\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle.$$

Mit der Paralelogrammgleichung folgt nun

$$4\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle \leq w(T)(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2w(T)(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$
$$\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle \leq w(T) \quad \text{und} \quad |\langle Tx, y\rangle| \leq w(T) \qquad \forall \|x\|, \|y\| \leq 1.$$

□

Satz 18.7. *Sei $T \in \mathscr{L}(H)$ normal, dann gilt $\sigma(T) = A\sigma(T)$.*

Proof. Im Allgemein gilt $A\sigma(T) \subseteq \sigma(T)$. Um die Umkehrung zu zeigen sei jetzt $\lambda \in \sigma(T)$. Ist $\lambda - T$ nicht injektiv, so folgt $\lambda \in P\sigma(T) \subseteq A\sigma(T)$. So können wir $\ker(\lambda - T) = \{0\}$ annehmen. Da $\lambda \in \sigma(T)$, kann $(\lambda - T)$ nicht surjektiv sein. Es gilt $\{0\} = \ker(\lambda - T) = \ker(\lambda - T)^* = \operatorname{im}(\lambda - T)^\perp$. D.h. $\operatorname{im}(\lambda - T)$ ist dicht in H, und so kann $\operatorname{im}(\lambda - T)$ nicht abgeschlossen sein, denn das implizierte dann die Surjektivität. Dies zeigt $\lambda \in A\sigma(T)$. □

Satz 18.8. *Sei $T \in \mathscr{L}(H)$ normal. Dann gilt $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$.*

Proof. Sei $\lambda \in \sigma(T)$. Nach Satz 18.7 und Lemma 16.14 existiert eine Folge $(x_n) \subseteq H$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\lambda x_n - Tx_n \to 0$. So gilt $\langle(\lambda - T)x_n, x_n\rangle = \lambda\|x_n\|^2 - \langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$, d.h. $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda$, somit ist $\lambda \in \overline{W(T)}$ gezeigt. □

Satz 18.9. *Es sei $T \in \mathscr{L}(H)$ normal, es gilt dann $r(T) = \|T\|$.*

Proof. Es gilt

$$\left(\|T\|^2\right)^{2^n} = \left\|TT^*\right\|^{2^n} \underset{18.5b)}{\overset{TT^*selbstadj.}{=}} \left\|(TT^*)^{2^n}\right\| = \left\|T^{2^n}(T^{2^n})^*\right\| = \left\|T^{2^n}\right\|^2,$$

also $r(T)^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(\|T^{2^n}\|^2\right)^{1/2^n} = \|T\|^2$. □

Satz 18.10. *Für $T \in \mathscr{L}(H)$ normal gilt $w(T) = \|T\|$.*

Proof. Nach Satz 16.9 existiert ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = r(T) = \|T\|$. Betrachte jetzt den Operator $e^{i\varphi}T$, wobei $e^{i\varphi}$ so gewählt ist, dass $e^{i\varphi}\lambda = |\lambda|$. Dann ist $e^{i\varphi}T$ auch normal und es gilt $r(e^{i\varphi}T) = r(T) \in \sigma(e^{i\varphi}T)$. Nach Satz 18.7 und Lemma 16.14 existiert eine Folge $(x_n) \subseteq H$ mit $\|x_n\| = 1$ und $r(T)x_n - e^{i\varphi}Tx_n \to 0$. So gilt $\langle r(T)x_n - e^{i\varphi}Tx_n, x_n\rangle = r(T)\|x_n\|^2 - \langle e^{i\varphi}Tx_n, x_n\rangle \to 0$. D.h. $|\langle Tx_n, x_n\rangle| = |\langle e^{i\varphi}Tx_n, x_n\rangle| \to r(T)$. Damit ist $w(T) = r(T)$, denn es gilt $w(T) \leq \|T\| = r(T)$. □

Satz 18.11. *Sei $T \in \mathscr{L}(H)$ selbstadjungiert. Wir setzen $m := \inf\{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}$ und $M := \sup\{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}$. Dann gilt*

$$\sigma(T) \subseteq [m, M] \subseteq [-\|T\|, \|T\|],$$

ferner gehören m und M zu $\sigma(T)$.

Proof. Dass $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ gilt, folgt aus Satz 18.8, denn für selbstadjungiertes $T \in \mathscr{L}(H)$ gilt $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$. Nehmen wir $m = 0$ und $M = w(T)$ an. Dies ist nämlich keine Einschränkung, denn wir können statt T den Operator $T - m$ betrachten. Es gilt dann $r(T - m) = w(T - m) = M - m$.

Also, unter dieser Annahme, gilt $M = w(T) = \|T\| = r(T)$, und so folgt nach Satz 16.9, dass $M = r(T)$ zum Spektrum gehört, und wegen $[0, M] = W(T)$ gilt nach Satz 18.8 $\sigma(T) \subseteq [0, M]$.

Das selbe Argument für $T - M$ gibt $m - M \in \sigma(T - M)$, und so $m \in \sigma(T)$. □

Lemma 18.12 (Orthogonale Eigenvektoren)**.** *Sei $T \in \mathscr{L}(H)$ normal und seien λ, μ verschiedene Eigenwerte von T. Wenn x bzw. y ein Eigenvektor von T zu λ bzw. μ ist, dann gilt $x \perp y$.*

Proof. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle(T - \lambda)x, y\rangle = \langle x, (T - \lambda)^* y\rangle = \left\langle x, T^*y - \overline{\lambda}y\right\rangle \\ &= \Big\langle x, \underbrace{(T - \mu)^* y}_{=0 \text{ nach } 18.5} + (\overline{\mu} - \overline{\lambda})y\Big\rangle = (\overline{\mu} - \overline{\lambda})\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

□

Satz 18.13. *Sei $T \in \mathscr{L}(H)$ kompakt und normal. Dann existiert ein ONS $e_1, e_2, \dots$ sowie $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass*

$$H = \ker T \oplus \overline{\mathrm{lin}}\{e_1, e_2, \dots\},$$

$$\textit{und} \qquad Tx = \sum_j \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j, \qquad \textit{für alle } x \in H,$$

wobei λ_j die von 0 verschiedenen Eigenwerte von T mit zugehörigen Eigenvektoren e_j sind. Falls ihre Anzahl unendlich ist, bilden die λ_j eine Nullfolge. Ferner ist $\|T\| = \max |\lambda_j|$.

Proof. Seien $\mu_1, \mu_2, \dots$ die abzählbar vielen, von 0 verschiedenen Eigenwerte von T, und sei $d_i := \dim \ker(\mu_i - T) < +\infty$ (siehe Theorem 17.5 und Korollar 17.2). Die Folge (λ_j) definieren wir durch

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots = \underbrace{\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1}_{d_1}, \underbrace{\mu_2, \mu_2, \dots, \mu_2}_{d_2}, \dots, \underbrace{\mu_n, \mu_n, \dots, \mu_n}_{d_n}, \dots \ .$$

So konvergiert dann λ_n gegen 0, falls es unendlich viele Werte sind. Wir wählen eine orthonormale Basis $e_i^1, e_i^2, \dots, e_i^{d_i}$ in $\ker(\mu_i - T)$, und setzen

$$e_1, e_2, \dots = \underbrace{e_1^1, \dots, e_1^{d_1}}, \underbrace{e_2^1, \dots, e_2^{d_2}}, \dots, \underbrace{e_k^1, \dots, e_k^{d_k}}, \dots \ .$$

Dann ist $\{e_j\}$ nach vorigem Lemma ein ONS und es gilt $Te_j = \lambda e_j$. Ferner ist $\ker T \perp e_j$. Wir definieren $H_1 := \ker T \oplus \overline{\mathrm{lin}}\{e_1, e_2, \dots\}$. Es ist dann $H = H_1$ zu zeigen. Sei $y \in H_1^\perp$, dann gilt $y \perp e_j$ und

$$\langle Ty, e_j \rangle = \langle y, T^* e_j \rangle = \langle y, \overline{\lambda_j} e_j \rangle = \lambda_j \langle y, e_j \rangle = 0.$$

Ferner ist $y \perp \ker T$, also für $x \in \ker T$ haben wir $\langle Ty, x \rangle = \langle y, Tx \rangle = 0$. Das heißt $Ty \in H_1^\perp$, folglich $TH_1^\perp \subseteq H_1^\perp$. Die Einschränkung von T auf $H_1^\perp$ ist normal und kompakt. Nach Definition ist $w(T|_{H_1^\perp}) = 0$, d.h. $T|_{H_1^\perp} = 0$ nach Satz 18.10. Sei $x \in H$ und

$$x = y + \sum_j \langle x, e_j \rangle e_j, \qquad y \in \ker T.$$

Da T stetig ist, gilt

$$Tx = Ty + \sum_j \langle x, e_j \rangle Te_j = \sum_j \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Die letzte Behauptung folgt aus Satz 18.10. □

Satz 18.14 (Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren)**.** *Sei H ein separabler Hilbertraum und $T \in \mathscr{L}(H)$ kompakt und normal. Dann existiert $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C}$ und eine ONB (e_n) mit $Te_n = \lambda_n e_n$ und*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \quad \textit{für alle } x \in H.$$

Proof. Wir verwenden Satz 18.13 und betrachten auch in $\ker T$ eine ONB. □

Satz 18.15. *Sei $T \in \mathscr{L}(H)$ kompakt und normal. Seien $\lambda_n \neq 0$ die Eigenwerte von T und $e_n^1, e_n^2, \dots, e_n^{d_n}$ die zugehörige orthogonale Eigenvektoren. Wir setzen*

$$P_n x := \sum_{j=1}^{d_n} \langle x, e_n^j \rangle e_n^j,$$

die Orthogonalprojektion auf $\ker(\lambda_n - T)$. *Dann konvergiert die Reihe*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

in Operatornorm.

Proof. Satz 18.13 zeigt

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x \quad \text{für alle } x \in H.$$

Es bleibt also die Konvergenz in Operatornorm zu beweisen. Dazu zeigen wir, dass $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j$ eine Cauchyfolge ist. Sei $m \geq n \geq N$. Dann gilt

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} \lambda_j P_j \right\| = \max\{|\lambda_j| : j = n, \dots, m\} \overset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

wie gezeigt in Satz 18.13, denn $\sum_{j=n}^{m} \lambda_j P_j$ ist ein normaler Operator mit den Nicht-Null-Spektrumpunkten $\{\lambda_j : j = n, \dots, m\}$. □

Korollar 18.16 (Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren, Multiplikator-Form)**.** *Sei H ein separabler Hilbertraum und $T \in \mathscr{L}(H)$ kompakt und normal. Es gibt einen unitären Operator $U : H \to \ell^2$ (d.h. eine surjektive Isometrie), so dass $UTU^* = M_{(\lambda_n)}$ ein Multiplikator für eine geeignete Folge $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C}$ ist. Also ist das folgende Diagramm kommutativ.*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{T} & H \\ U \downarrow & & \uparrow U^* \\ \ell^2 & \xrightarrow{M_{(\lambda_n)}} & \ell^2 \end{array}$$

Proof. Sei (e_n) die ONB aus Satz 18.14 und $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C}$ die zugehörige Folge von Eigenwerten. Wir definieren $U : H \to \ell^2$ durch

$$Ux := (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \langle x, e_3 \rangle, \dots).$$

Man beweist, dass U eine surjektive Isometrie ist, deren Inverse durch

$$U^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = U^{-1}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$$

gegeben ist. Für $(x_n) \in \ell^2$ gilt

$$UTU^{-1}(x_n) = UT\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = U\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, e_j \Big\rangle e_j =$$
$$= U\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j e_j = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \dots) = M_{(\lambda_n)}(x_n),$$

also folgt die Behauptung. □

19. Fouriertransformation

Lemma 19.1. *Es gilt:*

$$C_0(\mathbb{R}^d) = \Big\{ f \in C(\mathbb{R}^d) : \{|f| \geq \varepsilon\} \text{ ist kompakt } \forall \varepsilon > 0 \Big\}$$
$$= \Big\{ f \in C(\mathbb{R}^d) : \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \Big\}.$$

Proof. Offenbar gilt:

$$\Big\{ f \in C(\mathbb{R}^d) : \{|f| \geq \varepsilon\} \text{ ist kp } \forall \varepsilon > 0 \Big\} = \Big\{ f \in C(\mathbb{R}^d) : \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \Big\}.$$

Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ und $\varepsilon > 0$. Nach Definition existiert $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\|\varphi - f\|_\infty \leq \varepsilon/2$. Insbesondere gilt also $\{|f| \geq \varepsilon\} \subset \operatorname{supp} \varphi$, d.h. $\{|f| \geq \varepsilon\}$ ist kompakt.
Umgekehrt konstruiert man mit einem Mollifier eine Folge $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - f\|_\infty = 0$ (ÜA.). □

Definition 19.2. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann heißt $\hat{f}$, definiert durch*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\, \mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

die Fouriertransformierte *von f. Hierbei ist $\langle x, \xi\rangle := \sum_{i=1}^d x_i \xi_i$.*

Lemma 19.3. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $\hat{f} \in \mathrm{BC}(\mathbb{R}^d)$ und es gilt*

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Proof. Sei $\xi \in \mathbb{R}^d$ und $(\xi_k) \subset \mathbb{R}^d$ mit $\xi_k \to \xi$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} |\hat{f}(\xi_k) - \hat{f}(\xi)| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \left| \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi_k\rangle} - \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} \right| \overset{\text{Lebesgue}}{=} 0,$$

d.h. $\hat{f}$ ist stetig. Desweiteren gilt:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

□

Definition 19.4. *Wir nennen die Abbildung*

$$\begin{aligned}\Psi : L^1(\mathbb{R}^d) &\to BC(\mathbb{R}^d)\\ f &\mapsto \hat{f}\end{aligned}$$

die Fouriertransformation.

Satz 19.5. *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

(a) $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^d} f \hat{g}$.
(b) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f} \cdot \hat{g}$.
(c) Sei $x \mapsto x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \le k$. Dann gilt

$$\partial^\alpha \hat{f} = \widehat{(-ix)^\alpha f}.$$

(d) Sei $f \in W^{k,1}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \le k$
(e) Es gilt $\Psi\left(L^1(\mathbb{R}^d)\right) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$ (Riemann-Lebesgue).

Proof. (a) Wir erhalten mit Fubini:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) g(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(\xi) \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y)\,\mathrm{d}y \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(y) \mathrm{e}^{-i\langle y,\xi\rangle} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \mathrm{e}^{-i\langle x-y,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(y) \mathrm{e}^{-i\langle y,\xi\rangle} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}y = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

(c) Da $\partial_\xi^\alpha \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} = (-ix)^\alpha \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}$ gilt, folgt für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\partial_j \hat{\varphi}(\xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \frac{\mathrm{e}^{-i\langle x,\xi+he_j\rangle} - \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}}{h}\, \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Lebesgue}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} -ix_j \varphi(x) \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\, \mathrm{d}x \\
&= \widehat{(-ix)^{e_j}\varphi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d,\ j = 1, \ldots, d.
\end{aligned}$$

Approximiere f mit $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(d) Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial_j \varphi}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_j \varphi)(x) \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)(-i\xi_j) \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\, \mathrm{d}x \\
&= (i\xi)^{e_j} \hat{\varphi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d,\ j = 1, \ldots, d.
\end{aligned}$$

Approximiere $f \in W^{k,1}(\mathbb{R}^d)$ mit $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(e) Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt $\partial_x^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Insbesondere folgt aus (d), dass $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{\varphi}(\xi) = 0$, d.h. $\hat{\varphi} \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Approximiere $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

□

Beispiel 19.6. *Sei $a > 0$ und $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|^2}$. Dann gilt:*

$$\hat{f}(\xi) = \left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}.$$

Proof. Sei $d = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\hat{f})'(\xi) &= \widehat{(-ix)\mathrm{e}^{-a|x|^2}}(\xi) = \left(\frac{i}{2a}\widehat{(\mathrm{e}^{-a|x|^2})'}\right) \\
&= \frac{i}{2a}(i\xi)\hat{f}(\xi) = -\frac{1}{2a}\xi \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\mathrm{e}^{\frac{|\xi|^2}{4a}} \hat{f}(\xi)\right) = 0;$$

also ist $e^{|\xi|^2/4a}\hat{f}(\xi)$ konstant. Die Konstante ergibt sich aus

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a|x|^2}\, dx = \left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Somit erhalten wir die Behauptung für $d = 1$. Der allgemeine Fall folgt nun mit Fubini:

$$\hat{f}(\xi) = \prod_{j=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ax_j^2} e^{-ix_j\xi_j}\, dx_j = \left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}.$$

□

Notation 19.7. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definieren wir*

$$\check{f}(\xi) := \hat{f}(-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} f(x)\, dx.$$

Theorem 19.8 (Inversionsformel der Fouriertransformation)**.** *Seien $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt:*

$$(\hat{f})\check{} = \widehat{\check{f}} = f, \qquad f.\ ü.\ .$$

Proof. Für $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ setze

$$\varphi_{x,t}(z) := e^{i\langle x,z\rangle} e^{-t^2|z|^2}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{x,t}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x-\xi,z\rangle} e^{-t^2|z|^2}\, dz = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}} t^d} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t^2}} \\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} t^d} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t^2}} := (2\pi)^{\frac{d}{2}} g_t(x-\xi),\end{aligned}$$

wobei $g(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-|x|^2/4}$ und $g_t(x) := 1/t^d g(x/t)$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_{x,t}(\xi)\hat{f}(\xi)\, d\xi &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\hat{\varphi}_{x,t}(\xi)\, d\xi \\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\xi) g_t(x-\xi)\, d\xi = (2\pi)^{\frac{d}{2}} (f * g_t)(x).\end{aligned} \tag{24}$$

Man zeigt (vgl. Mollifier)

$$\lim_{t\to 0} \|f * g_t - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Desweiteren gilt:

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_{x,t}(\xi)\hat{f}(\xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{f}(\xi)\, d\xi = (2\pi)^{\frac{d}{2}} (\hat{f})\check{}(x). \tag{25}$$

Aus (24) und (25) folgt $f = (\hat{f})\check{}$. Analog zeigt man $f = \widehat{\check{f}}$. $\square$

Korollar 19.9. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\hat{f} = 0$. Dann gilt $f = 0$.*

Proof. Klar. $\square$

Theorem 19.10 (Plancherel)**.** *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und die Abbildung $\Psi|_{L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)}$ kann eindeutig zu einem unitärem Isomorphismus Ψ_2 auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ fortgesetzt werden.*

Proof. Sei $X := \{f \in L^1(\mathbb{R}^d) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)\}$. Dann ist insbesondere $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, d.h. $X \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. Ferner ist X dicht in $L^2(\mathbb{R}^d)$, da $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset X$. Seien $f, g \in X$ und $h := \overline{\hat{g}}$. Dann gilt:

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} \overline{\hat{g}}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{g}(x)\,\mathrm{d}x} = \overline{g(\xi)},$$

d.h.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f\overline{g} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f\hat{h} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{f}h = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{f}\overline{\hat{g}}.$$

Insbesondere folgt mit $g = f$, dass $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ gilt. Da $\Psi X = X$ kann $\Psi|_X$ zu einem unitären Isomorphismus Ψ_2 fortgesetzt werden.
Es bleibt zu Zeigen, dass

$$(\Psi_2 f)(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d).$$

Sei $(\varphi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\lim_{j\to\infty} \|f - \varphi_j\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$$
$$\lim_{j\to\infty} \|f - \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Einerseits gilt $\lim_{j\to\infty} \|\hat{f} - \hat{\varphi}_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = 0$, d.h.

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{B(0,R)} |\hat{\varphi}_j(\xi) - \hat{f}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = 0, \quad R > 0.$$

Andererseits folgt mit Plancherel

$$\lim_{j\to\infty} \|\hat{\varphi}_j - \Psi_2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0,$$

d.h.

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{B(0,R)} |\hat{\varphi}_j(\xi) - \Psi_2 f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = 0, \quad R > 0.$$

Damit folgt $\Psi_2 f(\xi) = \hat{f}(\xi)$ für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Bemerkung 19.11. *Für $p > 2$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ist $\hat{f}$ i. A. keine Funktion mehr (vgl. Distributionen-Theorie).*

Proof. Ohne Beweis. □

Satz 19.12. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

(a) Sei $x \mapsto x^\alpha f(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq k$. Dann gilt

$$\partial^\alpha \hat{f} = \widehat{(-ix)^\alpha} f.$$

(b) Sei $f \in H^k(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq k$.

Proof. Nach Satz 19.5 gilt die Behauptung für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Approximiere $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ mit $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und nutze Plancherel. □

Definition und Satz 19.13. *Sei $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $T_m : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$, $T_m f := \Psi_2^{-1}(m\Psi_2 f)$ ein stetiger Operator mit*

$$\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} = \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Die Funktion m heißt Fourier–Multiplikator.

Proof. Plancherel liefert

$$\begin{aligned}\|T_m f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \|\Psi_2^{-1}(m\Psi_2 f)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|m\Psi_2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|\Psi_2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),\end{aligned}$$

d.h. $\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$.
Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $0 < |\Omega| \leq 1$ mit $\inf_{x \in \Omega} |m(x)| \geq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} - \varepsilon$.
Dann gilt für $\varphi = \chi_\Omega$

$$\begin{aligned}\|T_m(\Psi_2^{-1}\varphi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \|m\Psi_2\Psi_2^{-1}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|m\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\geq \Big(\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} - \varepsilon\Big)\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},\end{aligned}$$

d.h. $\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} = \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$. □

Bemerkung 19.14. *Man kann zeigen, dass $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ eine notwendige Bedingung ist.*

Satz 19.15. *Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$ der Gleichung*

$$(\lambda - \Delta)u = f \text{ in } \mathbb{R}^d. \tag{26}$$

Desweiteren gilt für $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq 2$.

$$\|D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{|\lambda|^{1-|\alpha|/2}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Proof. Sei $m_\lambda(\xi) := (\lambda + |\xi|^2)^{-1}$. Dann gilt

$$|\lambda + \xi^2| = \sqrt{|\mathrm{Re}\,\lambda + \xi|^2 + |\mathrm{Im}\,\lambda|^2} \geq \sqrt{|\mathrm{Re}\,\lambda|^2 + |\mathrm{Im}\,\lambda|^2} = |\lambda|, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

und damit

$$\left|\frac{\xi^\alpha}{\lambda + \xi^2}\right| \leq \frac{\sqrt{|\lambda|}^{|\alpha|}}{|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{2}}}, \quad |\xi| \leq \sqrt{|\lambda|},$$

$$\left|\frac{\xi^\alpha}{\lambda + \xi^2}\right| \leq \frac{|\xi|^{|\alpha|}}{|\xi|^2} = \frac{1}{|\xi|^{2-|\alpha|}} \leq \frac{1}{|\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{2}}}, \quad |\xi| \geq \sqrt{|\lambda|},$$

d.h. nach Satz 19.13 genügt T_{m_λ} den Abschätzungen

$$\|D^\alpha T_{m_\lambda}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{1}{|\lambda|^{1-|\alpha|/2}}.$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}(\lambda - \Delta) T_{m_\lambda} f &= (\lambda - \Delta)\Psi_2^{-1} m_\lambda \Psi_2 f = \Psi_2^{-1}(\lambda + |\xi|^2)\Psi_2\Psi_2^{-1} m_\lambda \Psi_2 f \\ &= \Psi_2^{-1}(\lambda + |\xi|^2) m_\lambda \Psi_2 f = f.\end{aligned}$$

Seien nun $u, v \in H^2(\mathbb{R}^d)$ Lösungen von (26). Dann gilt:

$$\begin{aligned}0 &= \|0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|(\lambda - \Delta)(u - v)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\Psi_2^{-1}(\lambda + |\cdot|^2)\Psi_2(u - v)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \|(\lambda + |\cdot|^2)\Psi_2(u - v)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq |\lambda| \|\Psi_2(u - v)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = |\lambda| \|u - v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},\end{aligned}$$

d.h. $u = v$. □

Satz 19.16.

(a) *Sei $d = 1$, $\lambda > 0$. Dann gilt:*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\Psi^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\right)(x) = k(x) := \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x|}}{\sqrt{\lambda}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) *Sei $d = 1$, $\lambda > 0$. Dann gilt:*

$$\|k\|_{L^1(\mathbb{R})} = \frac{1}{\lambda}.$$

Insbesondere löst $u(x) := (k*f)(x)$ die Gleichung (26) für $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Proof.

(a) Sei $x > 0$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\xi}}{\lambda + |\xi|^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{e^{ix\xi}}{\xi + i\sqrt{\lambda}}}{\xi - i\sqrt{\lambda}} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{1}{2\pi} 2\pi i \frac{e^{ixi\sqrt{\lambda}}}{2i\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-x\sqrt{\lambda}}.$$

Analog $x < 0$.

(b) Es gilt:

$$\|k\|_{L^1(\mathbb{R})} = 2\int\limits_0^\infty k(x)\,\mathrm{d}x = 2\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\frac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{\lambda}}}{-\sqrt{\lambda}}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

Insbesondere löst $u(x) := (k * f)(x)$ die Gleichung (26) für $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Approximiere nun $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $(f_n) \subset L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ und nutze die a-priori Abschätzung aus Satz 19.15.

□

Anhang A. Masstheorie

In diesem Abschnitt bezeichnet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra.

Definition A.1.

(a) *Ein* positives *Maß ist eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, die σ-additiv ist.*
(b) *Ein* reelles *Maß ist eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, die σ-additiv ist.*
(c) *Ein* komplexes *Maß ist eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, die σ-additiv ist.*

Definition A.2. *$R \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heiß t* Halbring, *falls*

(a) *$\emptyset \in R$.*
(b) *$A, B \in R \Longrightarrow A \cap B \in R$.*
(c) *Sei $A, B \in R$ mit $A \subset b \Longrightarrow \exists C_1, \dots, C_n \in R$, paarweise disjunkt mit $B \setminus A = \sum_{j=1}^n C_j$.*

Definition A.3. *$R \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt* Ring, *falls*

(a) *$\emptyset \in R$.*
(b) *$A, B \in R \Longrightarrow A \cup B \in R$.*
(c) *$A, B \in R \Longrightarrow A \setminus B \in R$.*

Definition und Satz A.4. *Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$.*

(a) *Dann heiß t die die Mengenfunktion $|\mu|$, gegeben durch*

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^\infty |\mu(E_i)|, \quad E \in \mathcal{A},$$

wobei das Supremum über alle (paarweise disjunkten) Zerlegungen $\{E_i\}$ von E gebildet wird, die totale Variation *von μ.*
(b) *Die totale Variation von μ ist ein positives Maß.*
(c) *Die Mengenfunktionen*

$$\mu_+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu_- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

heiß en die positive bzw. die negative Variation von μ.

Definition A.5. *Ein Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt* absolutstetig *($\lambda << \mu$) bzgl. eines Maß es λ auf $\mathcal{A}$, falls*

$$\mu(E) = 0 \Longrightarrow \lambda(E) = 0, \quad E \in \mathcal{A}.$$

Satz A.6 (Hahn-Zerlegung)**.** *Sei μ ein reelles Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Dann existieren $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$ und*

$$\mu_+(E) = \mu(A \cap E), \quad \mu_-(E) = -\mu(B \cap E), \quad E \in \mathcal{A}.$$

Proof. s. Theorem 6.14 in Rudin, Real and Complex Analysis. □

Satz A.7 (Radon-Nikodym)**.** *Sei μ ein positives σ-endliches Maß auf $\mathcal{A}$ und λ ein komplexes Maß auf $\mathcal{A}$ mit $\lambda << \mu$. Dann existiert $h \in L^1(\mu)$ mit*

$$\lambda(E) = \int_E h \, \mathrm{d}\mu, \quad E \in \mathcal{A}.$$

Proof. s. Theorem 6.9 in Rudin, Real and Complex Analysis. □

Anhang B. Errata