Prof. Dr. U. Reif
S. Fröhlich, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
12.06.2006

8. Übungsblatt

Gruppenübungen

G19 Die Funktion $f(x) = \cos(4\pi x + 2)$ hat die Periodenlänge

☐ 4π ☐ 4 ☐ 2 ☐ $\frac{1}{4\pi}$ ☐ $\frac{1}{2}$

G20 Die Fourier-Reihe einer geraden Funktion ist eine

☐ reine Sinusreihe ☐ reine Kosinusreihe
☐ Reihe, in der Sinus- und Kosinusterme vorkommen

G21 Ist f periodisch mit der Periode 2π und auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ stetig bis auf einen Unstetigkeitspunkt $x_0 \in (0, 2\pi)$, so konvergiert ihre Fourier-Reihe in x_0 gegen

☐ $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x)$ ☐ $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x)$ ☐ $\frac{1}{2}\left\{\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) + \lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x)\right\}$

☐ $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx$

G 22 Skizzieren Sie die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x \le 2,\ 3 \le y \le 4\}$. Die Menge ist

☐ offen ☐ abgeschlossen ☐ beschränkt
☐ kompakt

G23 *Schaltkreis zum analogen Integrieren*

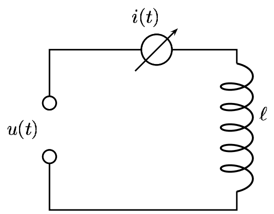
Der skizzierte Schaltkreis besteht aus einer Spannungsquelle mit zeitabhängiger Spannung $u(t)$, einem Strommessgerät und einer Spule mit Induktivität ℓ. Es sei $i(t)$ die gemessene Stromstärke.

Experimentell wird folgender Zusammenhang zwischen Spannung und Stromstärke festgestellt:

$$u(t) = u_0 \cos \omega t \quad \Longrightarrow \quad i(t) = \frac{u_0}{\omega \ell} \sin \omega t \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

Gegeben sei der L-periodische Spannungsverlauf

$$u(t) = \begin{cases} u_0\,, & |t| \le \frac{L}{4} \\ -u_0\,, & \frac{L}{4} < |t| \le \frac{L}{2} \end{cases}.$$



i) Skizzieren Sie $u(t)$.
ii) Entwickeln Sie $u(t)$ in eine Fourierreihe.
iii) Geben Sie $i(t)$ in einer Fourierdarstellung an. Benutzen Sie dabei obige Gesetzmäßigkeit.

Hausübungen

H26 *Schaltkreis zum analogen Integrieren* *2+3 Punkte*

Zurück zu Aufgabe G23: Seien $u_0 = 240V$, $\ell = 10mH$, und $L = 1ms$.

i) Geben Sie für diesen Fall die Fourierreihe von $u(t)$ und $i(t)$ an.
ii) Skizzieren Sie $i(t)$. Verwenden Sie hierzu einen Computer! Wie könnte $i(t)$ aussehen? Skizzieren Sie.

H27 Gegeben sei die Menge $M = \{(0, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2 \,:\, n \in \mathbb{N}\}$. *5 Punkte*

i) Skizzieren Sie M.
ii) Bestimmen Sie die Menge der inneren Punkte und die Menge der Häufungspunkte von M.
iii) Untersuchen Sie, ob M offen, abgeschlossen, beschränkt und/oder kompakt ist.

H 28 Skizzieren Sie die Menge *2 Punkte*

$$U := \Big\{X \in \mathbb{R}^m \,:\, \|X\| < 1\Big\},$$

und begründen Sie, ob U offen, abgeschlossen, beschränkt und/oder kompakt ist?

H 29 Bestimmen Sie (mit höchstens vier Zeilen Rechnung) die Fourier-Reihen der Funktionen *4 Punkte*

$$f(x) = \sin^2 x, \quad g(x) = \cos^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Es gelten $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$.