Prof. Dr. U. Reif
S. Fröhlich, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
15.05.2006

4. Übungsblatt

Wiederholungsaufgaben

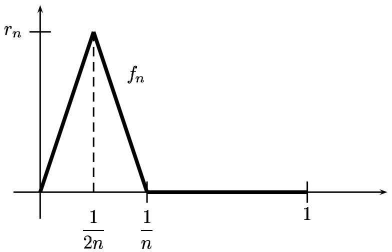
W3 Zur Wiederholung finden Sie auf der Rückseite die dritte Klausuraufgabe.

Gruppenübungen

G9 Bestimmen Sie den punktweisen Grenzwert folgender Funktionenfolgen:

i) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$ ii) $f_n(x) = ne^{-nx^2}$ iii) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ iv) $f_n(x) = \sqrt[n]{x},\ x \in \mathbb{R}_0^+$

G10 Die Funktionenfolge (f_n) sei wie in folgender Skizze gegeben:



Betrachten Sie den Fall $r_n = n^2$.

i) Geben Sie (f_n) explizit an.

ii) Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig?

iii) Vergleichen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Erklären Sie Ihre Beobachtung.

Führen Sie Ihre Untersuchungen nun für die Fälle $r_n = n$ und $r_n = 1$ durch. Diskutieren Sie insbesondere die Vertauschbarkeit von Limes und Integration. Finden Sie eine Folge r_n, sodass f_n gleichmäßig konvergiert.

G11 Gegeben sei

$$f_n(x) = x - \frac{x^n}{n} \quad \text{auf } [0,1].$$

i) Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert $f(x)$ dieser Funktionenfolge.

ii) Bilden Sie die Ableitungen $f_n'(x)$ und $f'(x)$. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ auf $[0,1]$?

Hausübungen

H11 6 Punkte

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \quad \text{für } n = 1, 2 \ldots$$

H12 4 Punkte

Bestimmen Sie den punktweisen Grenzwert folgender Funktionenfolgen:

i) $f_n(x) = \arctan(x-n)$ ii) $f_n(x) = n(x - n + |x-n|),\ x \in \mathbb{R}_0^+$

iii) $f_n(x) = \arctan(nx)$ iv) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$

H13 1+1+2+2 Punkte

Betrachten Sie die Funktionenfolge

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad \text{auf } [0,1].$$

i) Berechnen Sie $f_n(0)$ und $f_n(1)$.

ii) Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge.

iii) Berechnen Sie die Folge der Maximalwerte $f_n(x_n)$, wobei f_n an der Stelle x_n ihr lokales Maximum annimmt. Berechnen Sie insbesondere $f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)$.

iv) Entscheiden Sie nun, ob die Folge $f_n(x)$ gleichmäßig konvergiert. Ändern Sie gegebenenfalls (f_n) um in eine auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergente Folge (g_n).