**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. U. Reif
Steffen Fröhlich
Nadiem Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
24.04.2006

# 1. Übung

**W1** Auf der Rückseite finden Sie die erste Klausuraufgabe. Lösen Sie diese zur Einstimmung und Wiederholung des Stoffs aus dem ersten Semester.

## Gruppenübungen

**Aufgabe G1** Zeigen Sie, dass folgende nützlichen Gleichungen oder Aussagen gelten:

i) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)$

ii) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, $(a \le b \le c)$

iii) Sei $f$ eine stetige Funktion auf $[a,b]$. Gibt es Konstanten $m, M$, $m \le M$ mit $m \le f(x) \le M$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

**Aufgabe G2** Oft lassen sich Integrale vereinfachen, wenn man sich Symmetrie-Eigenschaften des Integranden zu nutze macht.

a) Seien $g(x), u(x)$ eine gerade, bzw. ungerade Funktion und $\tilde{G}(x) = G(x) + c_g$, bzw. $\tilde{U}(x) = U(x) + c_u$ Stammfunktionen. Sind $\tilde{G}(x)$und $\tilde{U}(x)$ gerade oder ungerade Funktionen? Falls nicht, wie muss man die Konstante wählen?

b) Sei $g(x)$eine gerade Funktion. Zeigen Sie, dass dann gilt: $\int_{-a}^a g(x)dx = 2\int_0^a g(x)dx$

c) Sei $u(x)$ eine ungerade Funktion. Zeigen Sie, dass dann gilt: $\int_{-a}^a u(x)dx = 0$

d) Überlegen Sie sich zu jeder der obigen Situationen ein oder zwei Beispiele.

**Aufgabe G3** Sei $f_{n,m}(x) = e^{inx}e^{imx}$, $n, n \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie das Integral $\int_0^{2\pi} f_{n,m}(x)dx$. Lassen Sie sich hierbei nicht dadurch irritieren, dass es sich bei $f_{n,m}(x)$ um komplexe Funktionen handelt und beachten Sie, dass das Ergebnis von $n$ und $m$ abhängig ist.

**Aufgabe G4** Die sogenannte Partialbruchzerlegung ist ein wichtiges Mittel um rationale Funktionen zu integrieren. Berechnen Sie die Stammfunktionen zu den folgenden Funktionen:

i) $f(x) = \frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

ii) $f(x) = \frac{3}{x^3+x^2-x-1}$

iii) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2-3x+2)}$

**Aufgabe G5** Berechnen Sie folgende bestimmten Integrale:

i) $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ ii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ iii) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$
iv) $\int_{-1}^1 x^7 \cos x dx$

## Hausübungen

**Aufgabe H1** (3+2 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $g(x) = (x - \frac{\pi}{2})f(sinx)$, wobei f eine beliebige stetige Funktion sei.

i) Überlegen Sie sich zuerst, welche Symmetrie-Eigenschaft $g(x)$ besitzt. Verwenden Sie hierzu die Transformation $g(x) \to g(x + \frac{\pi}{2})$ und überlegen sich, was sie bewirkt. Fertigen Sie hierzu eine Skizze an.

ii) Zeigen Sie nun $\int_0^\pi g(x)dx = 0$. Verwenden Sie eine passende Substitution und Ihr Wissen über die Integration von Funktionen mit Symmetrie-Eigenschaften.

**Aufgabe H2** (3+3+3 Punkte)
Zeigen sie für $n, m \in \mathbb{N}$:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = 0$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 2\pi & \text{für } n = m = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq m \\ \pi & \text{für } m = n \neq 0 \end{cases}$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n = m = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq m \\ \pi & \text{für } m = n \neq 0 \end{cases}$

Verwenden Sie hierzu die Ergebnisse, die Sie in Aufgabe G3 erhalten haben und die eulersche Gleichung $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, bzw. die Gleichungen $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ und $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

**Aufgabe H3** (5 Punkte)
Berechnen Sie folgende bestimmten Integrale:

i) $\int_{-3}^3 \sinh x dx$ ii) $\int_1^e 2x \ln x dx$ iii) $\int_2^4 \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}dx$ iv) $\int_{-1}^1 xe^{-x^2}dx$
iv) $\int_0^1 \arctan x dx$