

## 7. Übungsblatt

### Hausübungen

#### H22

3 Punkte

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte ohne (!) Verwendung der Regel von l'Hospital:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{3 \sin^2 x}, \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\ln(1 + x^3)}.$$

Berechnen Sie zum Vergleich (iii) mit der Regel von l'Hospital.

#### H23

1+2 Punkte

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \ln(1 + x^2) + \cos(\alpha x)$$

mit einem reellen Parameter  $\alpha$ .

- (i) Berechnen Sie  $T_5 f(x)$  an der Entwicklungsstelle  $x_0 = 0$ .
- (ii) Untersuchen Sie  $f$  in  $x_0$  auf ein lokales Extremum in Abhängigkeit von  $\alpha$ . Unterscheiden Sie dabei für  $\alpha$  drei Fälle!

#### H24

2+1+2 Punkte

Sei  $f(x)$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion.

- (i) Zeigen Sie

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

- (ii) Ist  $f$  zusätzlich gerade, so folgern Sie aus (i)

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx.$$

- (iii) Welche Aussagen können Sie über die Fourierkoeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  von  $f$  machen?

#### H25

1+1+4+1 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

- (i) Setzen Sie  $f$  stetig zu einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $F$  fort. Skizzieren Sie  $F$ .
- (ii) Ist  $F$  gerade oder ungerade? Was können Sie über die Fourierkoeffizienten  $b_n$  von  $F$  aussagen?
- (iii) Berechnen Sie nun die Fourierreihe von  $F$ .
- (iv) Durch Einsetzen eines konkreten  $x$ -Wertes in diese Fourierreihe erhalten sie eine gewöhnliche numerische Reihe.

Folgern Sie durch Einsetzen eines geeigneten  $x$ -Wertes in Ihr Resultat aus (iii), daß gilt

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$