

5. Übungsblatt

Gruppenübungen

G12 Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{ne^n} (x-1)^n \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n})^n x^n \quad (iii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x+1)^{3n}}{2} \quad (iv) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

G13 Berechnen Sie die Taylorreihen folgender Funktionen

$$i) f(x) = \frac{1}{1+x} \quad ii) g(x) = \frac{x}{1+x} \quad iii) h(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

jeweils um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Notieren Sie auch stets das Taylorpolynom bis zur sechsten Ordnung.

G14 Berechnen Sie die Taylorreihen der Funktionen mit den angegebenen Entwicklungspunkten x_0 .

$$(i) \cosh x \text{ mit } x_0 = 0 \quad (ii) \sin x \text{ mit } x_0 = \frac{\pi}{2} \quad (iii) 1 + x - 2x^2 \text{ mit } x_0 = 1 \\ (iv) \sqrt{1+x} \text{ mit } x_0 = 0 \quad (v) \sqrt{x} \text{ mit } x_0 = 1$$

G15 Ermitteln Sie zur Funktion

$$f(x) = \ln(1+x), \quad -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4},$$

das Taylorpolynom $T_n f(x)$ mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$. Wie groß ist n zu wählen, damit für den Fehler gilt

$$|f(x) - T_n f(x)| < \frac{1}{100}.$$

Hausübungen

H14 4 Punkte

Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \quad (ii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} x^{2n} \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n \quad (iv) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 5^n (x-2)^n$$

H15 4 Punkte

Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = e^x \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Hinweis: Beachten Sie $f^{(4)}(x) = -4f(x)$.

H16 4 Punkte

Die Funktion

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

soll durch ihr Taylorpolynom $T_4 f(x)$ vierter Ordnung approximiert und der Fehler $|f(x) - T_4 f(x)|$ für $|x| \leq 0.1$ abgeschätzt werden.