

12. Übungsblatt

Gruppenübungen

G39 Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(y) = \int_0^1 \frac{\sin(xy)}{x} dx$$

nach y durch Vertauschen von Differentiation und Integration.

G40 Zwei Hochspannungsmasten stehen $d = 100m$ voneinander entfernt. Die Leitung, welche vermittels

$$y = f(x) = a \cdot \cosh \frac{x}{a}, \quad -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2},$$

mit einem freien Parameter $a \in \mathbb{R}$ beschrieben wird, hat in der Mitte der beiden Masten eine Höhe von $48m$. Der eine Hochspannungsmast steht bei $x = -\frac{d}{2}$, der zweite bei $x = \frac{d}{2}$.

- (i) Bestimmen Sie den Parameter a .
- (ii) Wie lang ist die Leitung?

G41 Fließt ein konstanter Strom I durch einen unendlich langen Leiter, so wird das Magnetfeld

$$F(x, y, z) = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

aufgebaut, wobei die z -Achse in Stromrichtung liegt.

Sei K eine kreisförmige Kurve parallel zur $[x, y]$ -Ebene, mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt auf der z -Achse.

- (i) Parametrisieren Sie die Kurve K in Gegenuhrzeigersinn.
- (ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_K F \cdot dX$. Benutzen Sie Polarkoordinaten

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t.$$

G42 Berechnen Sie, sofern möglich, die Potentiale folgender Vektorfelder:

- (i) $F(x, y) = (2x, 2y)^T$
- (ii) $F(x, y) = (2y, 2x)^T$
- (iii) $F(x, y) = (x, xy)^T$
- (iv) $F(x, y, z) = (z \cos y, -z x \sin y + z, x \cos y + y)^T$

Hausübungen

H41 Berechnen Sie die Längen folgender Kurven:

5 Punkte

Zykloide $X_1(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^T, \quad t \in [0, 2\pi],$

Spirale $X_2(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, 2\pi].$

H42 Gegeben sei das Vektorfeld

7 Punkte

$$F_\alpha = (e^{x+y} + \alpha xy, e^{x+y} + x^2)^T$$

mit einem freien Parameter α .

- (i) Bestimmen Sie α derart, dass F_α ein Potenzial besitzt. Bestimmen Sie dieses Potenzial.
- (ii) Berechnen Sie für $\alpha = 0$ und

$$X(t) = (t^2, t^3)^T, \quad t \in [0, 1],$$

das Kurvenintegral

$$W = \int_K F_0(X) \cdot dX,$$

indem Sie F_0 geeignet als Summe zweier Vektorfelder schreiben.

H43 Berechnen Sie

5 Punkte

$$\int_K (x, xy) \cdot dX$$

für folgende Wege von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$:

$$K_a : X(t) = (t, t), \quad t \in [0, 1]$$

$$K_b : X(t) = (t, t^2), \quad t \in [0, 1]$$

$$K_c = K_1 \cup K_2 \quad \text{mit} \quad K_1 : X(t) = (t, 0), \quad t \in [0, 1]$$

$$K_2 : X(t) = (1, t), \quad t \in [0, 1]$$

Erklären Sie Ihre Resultate!