Prof. Dr. U. Reif
S. Fröhlich, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
26.06.2006

10. Übungsblatt

Gruppenübungen

Wiederholung Komplexe Zahlen

1. Gegeben seien $z = 1 + 2i$ und $w = 3 - i$.
   (i) Skizzieren Sie z und w in der komplexen Ebene.
   (ii) Berechnen Sie
   $$\overline{z}, \quad \overline{w}, \quad |z|, \quad |w|, \quad \arg z, \quad \arg w, \quad z+w, \quad z\cdot w, \quad \frac{z}{w}.$$
   (iii) Gegeben Sie z und w in Eulerscher Darstellung an.
   (iv) Wie würden Sie möglichst einfach z^5 und w^7 berechnen?
2. Berechnen Sie
   $$w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{111}.$$

G30 Gegeben sei die Funktion
$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - xz^2.$$

(i) Der Gradient ∇f an der Stelle $(x,y,z) = (1,1,1)$ lautet

☐ $2x + 4y - z^2 - 2xz$ ☐ $(1,4,-2)^T$ ☐ 2 ☐ $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

(ii) Berechnen Sie $\|\nabla f(0,1,-1)\|$.

G31 Gegeben sei das Vektorfeld
$$F(x,y) = (3x^2 + y^2, xy)^T.$$
Die Ableitung DF an der Stelle $(1,2)$ lautet

☐ 7 ☐ $(7,2)$ ☐ $(6,1)^T$ ☐ $\begin{pmatrix}6 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}6 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

G32 Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung der Funktion
$$f(x,y,z) = x^2y^3 + 4z^2 + 2.$$
Geben Sie ihren Gradienten und ihre Hesse-Matrix an.

G33 Berechnen Sie die Ableitung $\frac{dh}{dt}$ der Funktion $h(t) = f(G(t))\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei
$$f(x,y) = \arctan(x^3 + y), \quad G(t) = (e^{2t}, t^2)^T,$$
und zwar einmal mittels Kettenregel, ein weiteres mal direkt nach Einsetzen von G in f.

G34 *Zu Aufgabe G28*

Betrachten Sie die Funktion
$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

(i) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$.
(ii) Berechnen Sie die Ableitung von f in Richtung $R = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)^T$.
(iii) In welcher Richtung besitzt der Graph von f im Punkt $(x,y)^T = (1,-2)^T$ seinen steilsten Anstieg?

Hausübungen

H34 2 Punkte

Seien $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Berechnen Sie die Ableitungen
$$\frac{d}{ds} f(\cos s, -2\sin s^2), \quad \frac{d}{dt} g(t^2, 1 + e^{2t}).$$

H35 3 Punkte

Gegeben sei die Funktion
$$f(x,y,z) = xz + \cos(2x + y).$$

(i) Bestimmen Sie den Gradienten von f.
(ii) Ermitteln Sie die Richtungsableitung von f in Richtung $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)^T$ in $(\pi, \frac{\pi}{2}, \pi)$.

H36 4 Punkte

Durch
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$$
ist bei $(1,-2)$ implizit eine Funktion $y = h(x)$ mit $h(1) = -2$ gegeben. Berechnen Sie $h'(1)$, und zwar einmal durch Auflösen nach y, ein weiteres mal durch implizites Differenzieren der Gleichung $x^2 + y^2 - 5 = 0$.