Prof. Dr. U. Reif
S. Fröhlich, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
17.06.2006

9. Übungsblatt

Gruppenübungen

G24 Eine stetige Funktion $f\colon M \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ nimmt auf M ihr Maximum an, falls M

(i) abgeschlossen ist (ii) beschränkt ist (iii) kompakt ist.

G25 Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt, falls M

(i) offen, abgeschlossen und beschränkt ist (ii) abgeschlossen und beschränkt ist
(iii) offen und beschränkt ist.

G26 Finden Sie Mengen mit folgenden Eigenschaften:

(i) offen und beschränkt (ii) abgeschlossen und beschränkt (iii) offen und abgeschlossen
(iv) beschränkt, aber weder abgeschlossen noch offen.

G27 Diskutieren Sie die Funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{für } x^2+y^2=0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit in $\mathbb{R}^2$, insbesondere im Punkt $(x,y)=(0,0)$.

G28 Betrachten Sie die durch die Funktion

$$z = \frac{1}{x^2+y^2}$$

gegeben Fläche im $\mathbb{R}^3$. Skizzieren Sie

(i) einige Höhenlinien $H_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : z(x,y) = c\}$,
(ii) den Schnitt $x = 0$,
(iii) den Schnitt $y = 0$.

G29 Gegeben seien die Funktionen

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad F(p,q) = \begin{pmatrix} 3p+q \\ pq \\ e^{p+q} \end{pmatrix},$$

$$G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad G(t) = \begin{pmatrix} 4\cos t \\ 4\sin t \end{pmatrix},$$

$$h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad h(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Geben Sie alle möglichen Verkettungen zweier Funktionen an.

Hausübungen

H30 9 Punkte

Visualisieren Sie mit Matlab, etc. folgende ebenen Kurven:

(i) $X(t) = (\cos t(1+\cos t), \sin t(1+\cos t))$ (*Herzkurve*)
(ii) $X(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ (*Astroide*)
(iii) $X(t) = (0.75\cos t - 0.25\cos(3t), 0.75\sin t - 0.25\sin(3t))$ (*Nephroide*)
(iii) $X(t) = (\cos pt, \sin qt), \quad t \in [0, 2\pi]$
für $(p,q) = (1,1),\ (1,3),\ (2,3),\ (3,5),\ (5,7),\ (7,11)$

H31 2 Punkte

Möbiusband

Visualisieren Sie unter Verwendung eines Computerprogramms die Fläche

$$X(u,v) = \Big(\cos u + v\sin\frac{u}{2}\cos u, \sin u + v\sin\frac{u}{2}\sin u, v\cos\frac{u}{2}\Big), \quad (u,v) \in \mathbb{R} \times (-1,1).$$

H32 4 Punkte

Gegeben sei die lineare Funktion $F = (f,g)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vermöge

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} 3x+y \\ -2x+5y \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion F^{-1}.

Können Sie das Problem in Matrixschreibweise formulieren?

H33 6 Punkte

Gegeben sei das Temperaturfeld $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gemäß

$$T(x,y) = x^2 + 4y^2\,.$$

(i) Veranschaulichen Sie sich zuerst das Feld durch Skizzieren einiger Höhenlinienlinien und skizzieren Sie dann die von $\big(x,y,T(x,y)\big)$ erzeugte Fläche.
(ii) Werten Sie die Temperatur entlang der spiralförmigen Teilchenbahn $X(t) = (t\cos t, t\sin t)$ aus.