(H 1) **Extrema einer Funktion**

Sei $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, V(x,y,z) = xyz$ gegeben. Gesucht sind die Seitenlängen $x, y, z > 0$ einer Schachtel ohne Deckel, so dass die Schachtel bei gegebener Oberfläche $c > 0$ $(c = xy + 2zx + 2zy)$ maximales Volumen $V(x,y,z)$ hat.

(a) Ersetzen Sie z und berechnen Sie die kritischen Stellen der Funktion $f(x,y) := V(x,y,\frac{c-xy}{2(x+y)}) = \frac{cxy-x^2y^2}{2(x+y)}$. Beweisen Sie, dass in der kritischen Stelle ein globales Maximum vorliegt.

(b) Verwenden Sie die Methode von Lagrange zur Berechnung der kritischen Stellen von $V(x,y,z)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = xy + 2zx + 2zy - c = 0$.

Lösung:

(a) $f'_x = \frac{(c-xy)2y^2-2xy^2(x+y)}{4(x+y)^2} = 0$ genau dann, wenn $c = x^2+2xy$. Analog zeigt man, dass $f'_y = 0$ genau dann, wenn $c = y^2 + 2xy$. Wenn $\nabla f(x,y) = (0,0)$, dann $x = y = \sqrt{\frac{c}{3}}$. $f(\sqrt{\frac{c}{3}}, \sqrt{\frac{c}{3}}) = \frac{c}{6}\sqrt{\frac{c}{3}}$.

Wir zeigen nun, dass f sein Maximum in $(\sqrt{\frac{c}{3}}, \sqrt{\frac{c}{3}})$ annimmt. Die möglichen Werte, die xy annehmen kann, liegen in (0,c). Für $0 < a < c$ und $a = xy$ gilt $y = \frac{a}{x}$ und

$$f(x, \frac{a}{x}) = \frac{ca - a^2}{2(x + \frac{a}{x})} =: g_a(x).$$

$g'_a(x) = \frac{a^2-ca}{2(x+\frac{a}{x})^2}(1 - \frac{a}{x^2}) = 0$ genau dann, wenn $x = \sqrt{a}$. $g_a(x)$ nimmt sein Maximum in $x = \sqrt{a}$ mit Wert $\frac{1}{4}(c\sqrt{a} + a^{\frac{3}{2}})$ an. Sei $h : (0,c) \to \mathbb{R} : a \to \frac{1}{4}(c\sqrt{a} + a^{\frac{3}{2}})$. $h'(a) = \frac{1}{4}(\frac{c}{2}a^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}) = 0$ genau dann, wenn $a = \frac{c}{3}$ und der Punkt $a = \frac{c}{3}$ ist das Maximum der Funktion h. Also nimmt f sein Maximum in $(\sqrt{\frac{c}{3}}, \sqrt{\frac{c}{3}})$ an. Die Seiten der Schachtel mit maximalen Volumen sind $x = y = \sqrt{\frac{c}{3}}, z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{3}}$.

(b) Lagrange-Funktion: $L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - c)$.

$$\begin{cases} (1) L_x = yz + \lambda(y + 2z) = 0, \\ (2) L_y = xz + \lambda(x + 2z) = 0, \\ (3) L_z = xy + 2\lambda(y + x) = 0, \\ (4) L_\lambda = xy + 2xz + 2yz - c = 0. \end{cases}$$

Aus (1) und (2) folgt, dass $z = -\frac{\lambda y}{y+2\lambda} = -\frac{\lambda x}{x+2\lambda}$. Daher ist $x = y$. Einsetzen $x = y$ in (3) liefert $x = -4\lambda$. Aus (4) erhält man $\lambda = \pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{c}{3}}$. Da $x > 0$ ist, ist $\lambda = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{c}{3}}$. Daraus kann man schliessen, dass der einzige kritische Punkt von V (unter der Nebenbedingung $g = 0$) $(x,y,z) = (\sqrt{\frac{c}{3}}, \sqrt{\frac{c}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{3}})$ ist.

(H 2) **Extrema einer Funktion unter einer Nebenbedingung**

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = x^2yz$ gegeben und $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ sei die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie alle Extremstellen von f auf S. Welche von Ihnen sind global?

Lösung: Gesucht sind Maximum und Minimum von f unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Lagrange-Funktion: $L(x,y,z,\lambda) = x^2yz + \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$. Es gilt

$$\left\{\begin{array}{c} (1) L_x = 2xyz + 2\lambda x = 0, \\ (2) L_y = x^2z + 2\lambda y = 0, \\ (3) L_z = x^2y + 2\lambda z = 0, \\ (4) L_\lambda = x^2+y^2+z^2-1 = 0. \end{array}\right.$$

Auflösen des Gleichungssystems liefert zwei Fälle.
1. Fall. $x = 0$. Dann $f(x,y,z) = 0$.
2. Fall. $x \neq 0$.
2.1. Fall. $\lambda = 0$. Dann ist $y = z = 0$ und $f(x,y,z) = 0$.
2.2. Fall. $\lambda \neq 0$. Dann ist $\lambda = -yz$ und daher ist $y \neq 0$ und $z \neq 0$. Einsetzen von λ in (2), (3) liefert $|z| = |y| = \frac{|x|}{\sqrt{2}}$. Aus (4) folgt, dass $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Daher sind die kritischen Punkte $x_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $x_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $x_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $x_4 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $x_5 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $x_6 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $x_7 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $x_8 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = \frac{1}{8}$ und $f(x_5) = f(x_6) = f(x_7) = f(x_8) = -\frac{1}{8}$. Da S eine kompakte Menge ist, die nur innere Punkte enthält, sind x_1, x_2, x_3, x_4 auch globale Maxima und x_5, x_6, x_7, x_8 - globale Minima von f.

(H 3) **Implizite Funktionen**
Betrachten Sie das nichtlineare Gleichungsystem

$$\left\{\begin{array}{c} g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 3 = 0 \\ g_2(x,y,z) = x + y + z = 0. \end{array}\right.$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses System in einer Umgebung des Punktes $(0,1,-1)$ eindeutig nach y, z aufgelöst werden kann, d.h. es gibt eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, so dass $y = \varphi_1(x), z = \varphi_2(x)$ das System löst.

(b) Berechnen Sie $\varphi'(0) = (\varphi_1'(0), \varphi_2'(0))$.

Lösung:

(a) Klar ist, dass $(0,1,-1)$ das System löst. Die Funktionen $g_i, i = 1,2$ sind in $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. $\det(\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y,z)})|_{(0,1,-1)} = 6 \neq 0$. Dann existiert nach dem Satz 32.3 die gewünschte Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

(b) Wir setzen $y = \varphi_1(x), z = \varphi_2(x)$ in das Gleichungssystem ein und differenzieren die beiden Gleichungen nach x. Im Punkt $x = 0$ gilt daher

$$\left\{\begin{array}{l} 2\varphi_1'(0) - 4\varphi_2'(0) = 3 \\ \varphi_1'(0) + \varphi_2'(0) = -1. \end{array}\right.$$

Daraus folgt, dass $\varphi_1'(0) = -\frac{1}{6}, \varphi_2'(0) = -\frac{5}{6}$ ist.