(Testfragen)

a) Nein. Satz 1, Kap.4 aus der Vorlesungsskript. Oder Satz 32.1 aus Finckenstein, Lehn, Schellhaas, Wegmann. Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure, Band I.

b) Nein. Es ist $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0, y_0)$ eine notwendige Bedingung für ein relatives Extremum. Satz 3, Kap.4 aus der Vorlesungsskript oder Satz 32.3 aus Finckenstein, Lehn, Schellhaas, Wegmann. Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure, Band I.

(G 1) **Extrema einer Funktion.**
Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ innerhalb des abgeschlossenen Dreiecks D mit den Eckpunkten $(0, 0), (2\pi, 0), (0, 2\pi)$.

(a) Skizzieren Sie den Definitionsbereich und tragen Sie nachfolgende Ergebnisse ein.

(b) Untersuchen Sie die Funktion auf mögliche lokale Extremalstellen oder Sattelpunkte im Innern von D und bestimmen Sie deren Typ.

(c) Diskutieren Sie das Verhalten von f auf dem Rand und Ermitteln Sie die globalen Extremalstellen von f auf D.

Lösung:

(b)

$$\begin{cases} f_x = \cos x - \cos(x + y) = 0 \\ f_y = \cos y - \cos(x + y) = 0. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass $x = y$ für $x, y \in [0, 2\pi]$ ist. Aus der Bedingung $\cos x - \cos(2x) = 2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0$ kann man schliessen, dass $(x, y) = (\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ der einzige kritische Punkt von f im Innern von D ist. $f(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Da f überall auf dem Rand gleich Null ist, ist $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ ein lokales Maximum.

(c) Da f überall auf dem Rand gleich Null ist, ist $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ auch ein globales Maximum. Alle Punkte des Randes sind absolute Minima von f.

(G 2) **Extrema einer Funktion unter einer Nebenbedingung. Die Methode von Lagrange**
Wir untersuchen die Funktion $f(x, y) = y^2$ auf der Menge

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2 - 1\}.$$

Gesucht sind die lokalen Extremstellen von f auf P. Vergleichen Sie die beiden Lösungswege:

(a) Ersetzen Sie y und berechnen Sie die Extremstellen von $f(x, x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2$. Welche von Ihnen sind global?

(b) Verwenden Sie die Methode von Lagrange zur Berechnung der kritischen Stellen von f auf der Menge P.

Lösung:

(a) $f'_x = 4(x^3 - x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0, x = \pm 1$. Der Punkt $x = 0$ ist ein lokales Maximum von f und $f(0) = 1$. Die Punkte $x = \pm 1$ sind lokale Minima von f und $f(\pm 1) = 0$. Da $f(x) \to +\infty$, wenn $x \to \pm\infty$, ist $x = 0$ kein globales Maximum, aber $x = \pm 1$ sind globale Minima.

(b) Lagrange-Funktion. $L(x, y, z) = y^2 + \lambda(y - x^2 + 1)$.

$$\begin{cases} L_x = -2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + \lambda = 0 \\ L_\lambda = y - x^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass entweder $x = 0$ oder $\lambda = 0$ ist.

(1) $\lambda = 0$. Dann ist $y = 0$ und $x = \pm 1$.

(2) $x = 0$. Dann ist $y = -1$.

Die kritischen Stellen sind daher $(\pm 1, 0), (0, -1)$ und $f(\pm 1, 0) = 0, f(0, -1) = 1$.

(G 3) **Implizite Funktionen**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = -\cos(x + y) + e^{x+y}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (0, 0)$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass die erhaltene Funktion $y = \varphi(x)$ in der Nähe von $x = 0$ zweimal stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie die zweite Ableitung von φ in $x = 0$.

(c) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von φ im Entwicklungspunkt $x = 0$.

Lösung:

(a) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x + y) + e^{x+y}$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x + y) + e^{x+y}$ von $f(x, y)$ sind stetig auf $\mathbb{R}^2$. Da $f(0, 0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + e^0 = 1 \neq 0$, können wir die Gleichung $f(x, y) = 0$ eindeutig nach y für (x, y) nahe $(0, 0)$ auflösen. D.h. es gibt eine $\delta > 0$, eine eindeutig bestimmte stetig differenzirbare Funktion $y = \varphi(x) : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $f(x, \varphi(x)) = 0$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$.

(b) φ ist stetig differentierbar und $\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}\Big|_{y=\varphi(x)} = -1$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$. φ ist eine Konstante auf $(-\delta, \delta)$, daher ist auch stetig differenzierbar und $\varphi''(x) = 0$ auf $(-\delta, \delta)$.

(c) Das Taylopolynom von φ im Entwicklungspunkt 0 ist daher $T(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 + ... = -x$.