(Testfragen)

a) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben. Kann man die Gleichung $g(x, y) = 0$ immer nach y auflösen?

b) Gesucht ist ein relatives Extremum von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $g = 0$ für $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Es existiert ein λ, sodass die Gleichung $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0, y_0)$ im Punkt (x_0, y_0) erfüllt ist. Ist (x_0, y_0) ein relatives Extremum?

(G 1) **Extrema einer Funktion**
Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ innerhalb des abgeschlossenen Dreiecks D mit den Eckpunkten $(0, 0), (2\pi, 0), (0, 2\pi)$.

(a) Skizzieren Sie den Definitionsbereich und tragen Sie nachfolgende Ergebnisse ein.

(b) Untersuchen Sie die Funktion auf mögliche lokale Extremalstellen oder Sattelpunkte im Innern von D und bestimmen Sie deren Typ.

(c) Diskutieren Sie das Verhalten von f auf dem Rand und ermitteln Sie die globalen Extremalstellen von f auf D.

(G 2) **Extrema einer Funktion unter einer Nebenbedingung. Die Methode von Lagrange**
Wir untersuchen die Funktion $f(x, y) = y^2$ auf der Menge

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2 - 1\}.$$

Gesucht sind die lokalen Extremstellen von f auf P. Vergleichen Sie die beiden Lösungswege:

(a) Ersetzen Sie y und berechnen Sie die Extremstellen von $f(x, x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2$. Welche von Ihnen sind global?

(b) Verwenden Sie die Methode von Lagrange zur Berechnung der kritischen Stellen von f auf der Menge P.

(G 3) **Implizite Funktionen**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = -\cos(x + y) + e^{x+y}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (0, 0)$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass die erhaltene Funktion $y = \varphi(x)$ in der Nähe von $x = 0$ zweimal stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie die zweite Ableitung von φ in $x = 0$.

(c) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von φ im Entwicklungspunkt $x = 0$.

(H 1) **Extrema einer Funktion**

Sei $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, V(x,y,z) = xyz$ gegeben. Gesucht sind die Seitenlängen $x, y, z > 0$ einer Schachtel ohne Deckel, so dass die Schachtel bei gegebener Oberfläche $c > 0$ $(c = xy + 2zx + 2zy)$ maximales Volumen $V(x,y,z)$ hat.

(a) Ersetzen Sie z und berechnen Sie die kritischen Stellen der Funktion $V(x, y, \frac{c-xy}{2(x+y)}) = \frac{cxy-x^2y^2}{2(x+y)}$. Beweisen Sie, dass in der kritischen Stelle ein globales Maximum vorliegt.

(b) Verwenden Sie die Methode von Lagrange zur Berechnung der kritischen Stellen von $V(x,y,z)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = xy + 2zx + 2zy - c = 0$.

(H 2) **Extrema einer Funktion unter einer Nebenbedingung**

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = x^2yz$ gegeben und $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ sei die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie alle Extremstellen von f auf S. Welche von Ihnen sind global?

(H 3) **Implizite Funktionen**

Betrachten Sie das nichtlineare Gleichungsystem

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 = 3 \\ g_2(x,y,z) = x + y + z = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses System in einer Umgebung des Punktes $(0, 1, -1)$ eindeutig nach y, z aufgelöst werden kann, d.h. es gibt eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, so dass $y = \varphi_1(x), z = \varphi_2(x)$ das System löst.

(b) Berechnen Sie $\varphi'(0) = (\varphi_1'(0), \varphi_2'(0))$.