(H 1) partielle Ableitungen
Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \ln(x^2+y^4) + \sqrt{1-x^2-y^2}$.

a) Die Funktion ln ist nur für positive Argumente definiert, also muss $x^2+y^4 > 0$ sein, d.h. $(x,y) \neq (0,0)$. Die Funktion $\sqrt{t}$ ist nur für $t > 0$ definiert und differenzierbar, somit muss $1-x^2-y^2 > 0$ gelten. Der max. Definitionsbereich lautet

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 < 1\} .$$

b) Es ist

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^4} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad , \quad f_y = \frac{4y^3}{x^2+y^4} - \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} .$$

(H 2) Gradient, Richtungsableitung und Tangentialebene
Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = (x+2y)^4 + e^{x+3y}$.

a) Es ist

$$f_x = 4(x+2y)^3 + e^{x+3y} \quad , \quad f_y = 8(x+2y)^3 + 3e^{x+3y}$$

und damit $\mathrm{grad} f(3,-1) = (4+1, 8+3) = (5,11)$.

b) Es ist $\mathrm{grad} f(3,-1) \cdot \frac{1}{5}(4,3) = \frac{53}{5}$.

c) Die Gleichung lautet

$$z = f(3,-1) + f_x(3,-1)(x-3) + f_y(3,-1)(y+1) = 2 + 5(x-3) + 11(y+1) .$$

(H 3) Extrema einer Funktion
Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{y^3}{1+y^6}$.

a) Es ist

$$0 = f_x = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad , \quad 0 = f_y = \frac{-3y^8+3y^2}{(1+y^6)^2} .$$

Damit ist $0 = x^2-1 = (x-1)(x+1)$, also $x = \pm 1$ und $0 = y^8-y^2 = y^2(y^6-1) = y^2(y^3-1)(y^3+1)$ also $y=0$ und $y = \pm 1$. Die kritischen Punkte lauten $(-1,-1)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$.
Überprüfen der kritischen Punkte: $f_{xx} > 0$ für $(-1,-1)$, $(-1,0)$ und $(-1,1)$
$f_{xx} < 0$ für $(1,-1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$
$f_{yy} > 0$ für $(-1,-1)$ und $(1,-1)$
$f_{yy} < 0$ für $(-1,1)$ und $(1,1)$
$f_{yy} = 0$ für $(1,0)$ und $(-1,0)$
Damit haben wir: $(-1,-1)$ ist lokales Minimum mit Funktionswert -1
$(1,1)$ ist lokales Maximum mit Funktionswert 1
$(1,-1)$ und $(-1,1)$ sind Sattelpunkte mit Funktionswert 0
$(-1,0)$ und $(1,0)$ sind mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht entscheidbar, nach genauerer Überprüfung sind es Sattelpunkte.

b) Wegen $f(x,y) \to 0$ für $x^2+y^2 \to +\infty$ ist das lokale Minimum $(-1,-1)$ ebenfalls das globale Minimum, ebenso ist $(1,1)$ das globale Maximum.

(H 4) Taylor-Polynom
Wir berechnen

$$f_x = e^{\sin x + \cos y} \cos x \quad f_y = -e^{\sin x + \cos y} \sin y \quad f_{xx} = e^{\sin x + \cos y} (\cos^2 x - \sin x)$$

$$f_{xy} = -e^{\sin x + \cos y} \cos x \sin y \quad f_{yy} = e^{\sin x + \cos y} (\sin^2 y - \cos y)\ .$$

Damit ergibt sich das Taylor-Polynom

$$f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}xy + f_{yy}y^2) = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\ .$$