(Testfragen)
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind wahr bez. falsch?

a) richtig

b) falsch, z.B. für $f(x) = x$ ist $||f(x)||$ in $x = 0$ nicht differenzierbar

c) richtig

d) falsch

(G 1) partielle Ableitungen
Ermitteln Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von

a) Für $f(x, y) = (x + \sin y)^3 + (\cos x + y)^2$ ist

$$f_x = 3(x + \sin y)^2 - 2(\cos x + y) \sin x \quad f_y = 3 \cos y(x + \sin y)^2 + 2(\cos x + y)$$

$$f_{xx} = 6(x + \sin y) + 2 \sin^2 x - 2(\cos x + y) \cos x \quad f_{xy} = 6 \cos y(x + \sin y) - 2 \sin x$$

und

$$f_{yy} = 6 \cos^2 y(x + \sin y) - 3 \sin y(x + \sin y)^2 + 2$$

b) Für $f(x, y, z) = x^2y^2 + z^2(x + y)$ ist

$$f_x = 2xy^2 + z^2 \quad f_y = 2x^2y + z^2 \quad f_z = 2z(x + y)$$

$$f_{xx} = 2y^2 \quad f_{xy} = 4xy \quad f_{xz} = f_{yz} = 2z \quad f_{yy} = 2x^2 \quad f_{zz} = 2(x + y)$$

(G 2) Gradient, Richtungsableitung und Tangentialebene
Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = xe^{2x-y^2}$.

a) Es ist $\text{grad} f(x, y) = (f_x, f_y) = (2x + 1, -2xy)e^{2x-y^2}$ und im Punkt $(2, 2)$ gleich $(5, -8)$.

b) Die Richtungsableitung ist $\text{grad} f(2, 2) \cdot \frac{1}{5}(3, 4) = \frac{1}{5}(5, -8) \cdot (3, 4) = -\frac{17}{5}$.

c) Die Gleichung der Tangentialebene lautet

$$z = f(2, 2) + (x - 2)f_x(2, 2) + (y - 2)f_y(2, 2) = 2 + 5(x - 2) - 8(y - 2) \ .$$

(G 3) Extrema einer Funktion
Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = e^{x+y^4-2y^2} - x$ im Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$.

a) Wir berechnen $f_x = e^{x+y^4-2y^2} - 1$ und $f_y = (4y^3 - 4y)e^{x+y^4-4y^2}$. Aus $f_x = 0$ folgt $x + y^4 - 2y^2 = 0$. Aus $f_y = 0$ folgt weiter $0 = y^3 - y = y(y^2 - 1)$. Daraus folgt $y_1 = -1$, $y_2 = 0$ und $y_3 = 1$ und in $f_x = 0$ eingesetzt folgt $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$. Die kritischen Punkte sind $(1, -1)$, $(0, 0)$ und $(1, 1)$.
Überprüfen der kritischen Punkte: $f_{xx} > 0$ gilt immer. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ gilt in $(1, -1)$ und $(1, 1)$ und $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ gilt für $(0, 0)$.
Damit sind $(1, -1)$ und $(1, 1)$ lokale Minima von f und $(0, 0)$ ein Sattel.

b) Es gibt $f \to +\infty$ für $|x|, |y| \to +\infty$. Somit gibt es keine globalen Maxima aber globale Minima, nämlich $(1,1)$ und $(1,-1)$ und es gilt $f(x,y) \geq f(1,1) = 0$.

(G 4) Taylor-Polynom
Mit Hilfe der geometrischen Reihe rechnen wir

$$\frac{1}{1-x+2y} = \frac{1}{1-(x-2y)} = 1 + (x-2y) + (x-2y)^2 + ... = 1 + x - 2y + x^2 - 4xy + 4y^2 + ...$$

Das Taylor-Polynom zweiten Grades lautet somit $1 + x - 2y + x^2 - 4xy + 4y^2$.