(H 1) **Fourier-Reihen**

Gegeben sei $f(x + 2\pi) = f(x)$ und $f(x) = x^2$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Skizzieren Sie $f(x)$ auf $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten von $f(x)$.

(c) Finden Sie mit Hilfe von (b) eine Reihedarstellung von $\frac{\pi^2}{12}$.

Lösung: **Lösung**: Es gilt $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{3}\pi^2, \quad n = 0 \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos nx dx \\
&= (-1)^n \frac{4}{n^2} \\
b_n &= 0, \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Wir erhalten also die Fourier-Reihe $FR(x)$ von f:

$$FR(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4[-\cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x - \frac{1}{3^2}\cos 3x \cdots] = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

Es ist offensichtlich dass f an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist. Nach dem Satz 28.1 erhalten wir:

$$0 = f(x_0) = FR(x_0) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n)^2}$$

Wir erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

als eine gewünschte Reihendarstellung von $\frac{\pi^2}{8}$.

(H 2) **Definitionen aus der Analysis**

Skizzieren Sie die Mengen und untersuchen Sie, ob sie offen/abgeschlossen/beschränkt/kompakt sind.

(a) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| < 1, |x - 1| < 2\}$

(b) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1, (x - 1)^2 + y^2 < 4\}$

(c) $M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sin x, x \in [0, \pi]\}$

Lösung:

(a) M_1 ist offen, wir finde für jeden Punkt aus M_1 eine ϵ-Umgebung, die in M_1 enthält. M_1 ist nicht beschränkt, weil die y-Komponent unbeschränkt ist. Die Randpunkte $(-1, 0), (3, 0)$ gehören nicht M_1, daher ist sie nicht abgeschlossen, somit auch nicht kompakt.

(b) Mit ähnlichem Argument wie in a) überzeugt man sich, dass M_2 nicht offen, beschränkt, nicht abgeschlossen, und nicht kompakt ist.

(c) M_3 ist nicht offen, abgeschlossen, beschränkt und somit kompakt.

(H 3) **Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlichen**
Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} y + x\cos(\frac{1}{y}) & \text{für} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad y = 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie f und g auf Stetigkeit in ihren Definitionsbereichen.

Lösung:

Betrachten wir zuerst f. Klar ist, dass f stetig auf $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ ist.
Behauptung: f ist nicht stetig an $(0,0)$.
Dazu wählen wir Folgen (x_k) und (y_k) mit $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = 0$ und $x_k = y_k^2$.
Der Grenzwert ist $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \dfrac{x_k y_k^2}{x_k^2 + y_k^4} = \dfrac{1}{2}$.
Anderseits besitzt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k)$ keinen Grenzwert für Folge (x_k) mit $x_k = y_k$.

Für die Funktion g gilt ähnliche Diskussion. Es ist klar, dass g stetig auf jedem Punkt (x, y) mit $y \neq 0$ ist. Für einen Punkt $(x_0, 0)$ wähle Folgen (x_k) und (y_k) mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ und $y_k = \frac{1}{2k\pi}$. Dann ist der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} g(x_k, y_k) = x_0$. Aber für eine andere $y_k = \frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ ist der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} g(x_k, y_k) = 0$. **Dennoch** ist g an der Stelle $(0,0)$ stetig. Die Funktion cos ist beschränkt, es folgt dass der Grenzwert von $f(x_k, y_k)$ gleich dem Grenzwert der Summe von zwei Nullfolgen.